

Paris 1971

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES

DE PARIS

par

Monsieur TARTAR Luc

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

Sujet de la Thèse : Interpolation non linéaire et Applications
soutenue le 23 AVRIL 1971 devant la Commission d'Examen

MM. J.L.LIONS Président
L. SCHWARTZ Examineurs
J.P.SERRE
M.S.BAOUENDI

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES

DE PARIS

par

Monsieur TARTAR Luc

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

Sujet de la Thèse : Interpolation non linéaire et Applications
soutenue le 23 AVRIL 1971 devant la Commission d'Examen

MM. J.L.LIONS Président
L. SCHWARTZ Examineurs
J.P.SERRE
M.S.BAOUENDI



INTERPOLATION NON LINEAIRE et APPLICATIONS

- Résumé -

CHAPITRE 1 -

Une première partie est consacrée à des théorèmes généraux d'interpolation non linéaire généralisant les résultats de J.L.LIONS et J.PEETRE.

Ces résultats sont ensuite appliqués à l'étude de la régularité de solutions d'équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires.

La méthode utilisée consiste à considérer la solution d'une équation comme une fonction des données et des coefficients intervenant dans cette équation.

Cette méthode est applicable dans de nombreux cas ; on s'est contenté de l'appliquer à quelques exemples simples.

CHAPITRE 2 -

Une première partie est consacrée à une généralisation non linéaire des espaces d'interpolation. On montre que sur une classe d'ensemble, du type $|u|^\lambda$ $u \in$ espace de SOBOLEV, on peut généraliser la méthode des traces de J.L. LIONS et la méthode K de J.PEETRE. Comme dans le cas linéaire, correspondant à $\lambda = 0$, on montre que les ensembles obtenus par les deux méthodes coïncident.

Une seconde partie est consacrée à la caractérisation de ces ensembles pour certaines valeurs des paramètres.

Enfin on compare sur un exemple les méthodes développées dans les deux chapitres.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550420_0038

CHAPITRE I - "INTERPOLATION NON LINEAIRE et REGULARITE"

INTRODUCTION

Dans cet article on se propose de développer une méthode nouvelle dans l'étude de la régularité d'équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires.

Cette méthode a l'avantage de pallier un des inconvénients de l'interpolation linéaire qui est d'obtenir des résultats de régularité "intermédiaire" en faisant des hypothèses de régularité trop forte sur les coefficients des équations ; on obtiendra ici les mêmes résultats mais avec des hypothèses de régularité "intermédiaire" sur les coefficients.

L'outil essentiel est l'interpolation non linéaire : on a dû généraliser les résultats existants, ceux-ci n'étant pas applicables dans la situation envisagée.

On n'a pas cherché systématiquement les domaines d'application de l'interpolation non linéaire et on s'est borné ici aux problèmes de régularité; on étudiera dans un autre article l'application à des problèmes de traces non linéaires.

Naturellement on peut adapter les méthodes qui suivent à bien d'autres équations. De même les théorèmes démontrés ici ne sont pas toujours optimaux.

Le plan sera le suivant :

0. Rappels d'interpolation linéaire.
1. Interpolation non linéaire.
2. Application à des équations aux dérivées partielles linéaires.
3. Application à des équations aux dérivées partielles non linéaires.

0. - RAPPELS D'INTERPOLATION LINEAIRE

On n'introduit dans ce paragraphe que les notions qui nous seront utiles par la suite.

On se restreint au cas des espaces de Banach. Dans un but de simplification, on n'utilisera le plus souvent les espaces L^p que dans le cas $1 \leq p \leq +\infty$, mais la plupart des résultats sont valables pour $0 < p \leq +\infty$. La valeur $p = +\infty$ sera exclue dans certains théorèmes pour des raisons techniques, mais on peut souvent dans ce cas donner une démonstration directe.

DEFINITION 1

Si A_0 et A_1 sont deux espaces de Banach inclus dans un espace localement convexe $\mathcal{A}$ on note pour tout élément a de $A_0 + A_1$.

$$(1) \quad K(t, a) = \inf \{ \|a_0\|_{A_0} + t \|a_1\|_{A_1} \mid a_0 \in A_0, a_1 \in A_1, a_0 + a_1 = a \}$$

si $0 < p_0, p_1 < +\infty$ on note pour tout a de $A_0 + A_1$

$$(2) \quad L(p_0, p_1; t, a) = \inf \{ \|a_0\|_{A_0}^{p_0} + t \|a_1\|_{A_1}^{p_1} \mid a_0 \in A_0, a_1 \in A_1, a_0 + a_1 = a \}.$$

DEFINITION 2

Si $0 < \theta < 1$ et $1 \leq p \leq +\infty$ on note

$$(3) \quad (A_0, A_1)_{\theta, p} = \{ a \in A_0 + A_1 \mid t^{-\theta} K(t, a) \in L_*^p(0, \infty) \}$$

où $L_*^p(0, \infty) = L^p(0, \infty; \frac{dt}{t})$; on le munit de la norme

$$(4) \quad \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, p}} = \|t^{-\theta} K(t, a)\|_{L_*^p(0, \infty)}$$

PROPOSITION 1

$(A_0, A_1)_{\theta, p}$ muni de la norme (4) est un Banach. Les espaces définis ainsi vérifient la "propriété d'interpolation linéaire" suivante :

si B_0, B_1 est un autre couple ; si T est une application linéaire de $A_0 + A_1$ dans $B_0 + B_1$ alors $T \in \mathcal{L}(A_0, B_0) \cap \mathcal{L}(A_1, B_1) \Rightarrow T \in \mathcal{L}((A_0, A_1)_{\theta, p}, (B_0, B_1)_{\theta, p})$.

PROPOSITION 2

Si $0 < \theta < 1$; $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ alors $(A_0, A_1)_{\theta, p} \subset (A_0, A_1)_{\theta, q}$.

Si $1 \leq p < +\infty$ $A_0 \cap A_1$ est dense dans $(A_0, A_1)_{\theta, p}$.

DEFINITION 3

Si $0 < p_0, p_1 < +\infty$; $0 < \theta < 1$; $0 < p \leq +\infty$ on note

$$(5) \quad (A_0, A_1)_{\theta, p; L} = \{a \in A_0 + A_1 \mid t^{-\theta} L(p_0, p_1; t, a) \in L_{*}^p\}$$

PROPOSITION 3

$(A_0, A_1)_{\theta, p; L} = (A_0, A_1)_{\tilde{\theta}, \tilde{p}}$ algébriquement où

$$(6) \quad \frac{1-\tilde{\theta}}{\tilde{\theta}} = \frac{1-\theta}{\theta} \frac{p_0}{p_1}$$

$$(7) \quad \tilde{p} = ((1-\theta)p_0 + \theta p_1)p$$

on a de plus

$$(8) \quad \|a\|_{(A_0, A_1)_{\tilde{\theta}, \tilde{p}}} \approx \|t^{-\theta} L(p_0, p_1; t, a)\|_{L_{*}^p}^{\frac{1}{(1-\theta)p_0 + \theta p_1}}$$

On utilisera une variante de la proposition précédente qui est la suivante :

PROPOSITION 4

Si $a \in A_0 + A_1$ avec $a = v_0(t) + v_1(t) \quad \forall t > 0$, tel que $t^{-\theta} v_0(t) \in L_{*}^{p_0}(A_0)$ et $t^{1-\theta} v_1(t) \in L_{*}^{p_1}(A_1)$ où $0 < \theta < 1$, $0 < p_0, p_1 < +\infty$.

Alors $a \in (A_0, A_1)_{\theta, p}$ où $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ et

$$(9) \quad \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, p}} \leq C \|t^{-\theta} v_0(t)\|_{L_{*}^{p_0}(A_0)}^{1-\theta} \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L_{*}^{p_1}(A_1)}^{\theta}$$

Pour les démonstrations de ces propriétés on se reportera à Peetre [1], [2] Butzer-Berens [1].

I. - INTERPOLATION NON LINEAIRE

1.1. CAS DES MAJORATIONS LOCALES

Soient $A_0 \subset A_1$, $B_0 \subset B_1$ des espaces de Banach.

Soit U un ouvert non vide de A_1 et T une application de U dans B_1 .

On fait sur T les hypothèses suivantes :

(1) T envoie $A_0 \cap U$ dans B_0

(2) $\exists \alpha, \beta : 0 < \alpha \leq 1 ; 0 < \beta$ tels que

$\forall a \in U \exists V$ voisinage de a dans U et $\exists c > 0 ;$

$$. b \in V \Rightarrow \|Ta - Tb\|_{B_1} \leq c \|a - b\|_{A_1}^\alpha$$

$$. b \in A_0 \cap V \Rightarrow \|Tb\|_{B_0} \leq c (\|b\|_{A_0}^\beta + 1).$$

THEOREME 1

Sous les hypothèses (1) (2), si $0 < \theta < 1 ; 1 \leq p \leq +\infty$ et $a \in (A_0, A_1)_{\theta, p} \cap U$ alors $Ta \in (B_0, B_1)_{\eta, q}$ où

$$(3) \quad \frac{1-\eta}{\eta} = \frac{1-\theta}{\theta} \frac{\alpha}{\beta}$$

$$(4) \quad q = \max(1, \frac{p}{(1-\eta)\beta + \eta\alpha}) = \max(1, (\frac{1-\theta}{\beta} + \frac{\theta}{\alpha})p)$$

DEMONSTRATION

Soit $a \in U \cap (A_0, A_1)_{\theta, p}$ et V le voisinage défini dans (2).

Pour tout $t > 0$ il existe une décomposition

$$a = a_0(t) + a_1(t) \quad \text{avec} \quad a_0(t) \in A_0 \quad \text{et} \quad a_1(t) \in A_1$$

$$\text{et} \quad \|a_0(t)\|_{A_0} + t \|a_1(t)\|_{A_1} \leq 2K(t, a)$$

On a $t^{-\theta} K(t, a) \in L_*^p(0, \infty)$ et aussi $\in L^\infty(0, \infty)$ d'après la proposition 1 du paragraphe 0.

On voit que $||a_1(t)||_{A_1} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$

Donc pour $t > t_0 > 0$ on a $a_0(t) \in V \cap A_0$

Posons (5) $\lambda = \frac{\eta}{\theta \beta} = \frac{1-\eta}{(1-\theta)\alpha}$ d'après (3)

$$(6) \quad Ta = b_0(t) + b_1(t)$$

$$b_0(t) = T(a_0(t^\lambda)) \quad \text{pour } t > t_0^{1/\lambda}$$

$$b_0(t) = 0 \quad \text{pour } 0 < t \leq t_0^{1/\lambda}$$

Evaluons maintenant $\int_0^\infty ||s^{-\eta} b_0(s)||_{B_0}^{p/\beta} \frac{ds}{s}$ dans le cas $p < +\infty$

$$= \int_{t_0^{1/\lambda}}^\infty s^{\frac{-\eta p}{\beta}} (||Ta_0(s^\lambda)||_{B_0}^{p/\beta}) \frac{ds}{s}$$

$$\leq C \int_{t_0^{1/\lambda}}^\infty s^{\frac{-\eta p}{\beta}} (||a_0(s^\lambda)||_{A_0}^p + 1) \frac{ds}{s} \quad \text{d'après (2)}$$

On fait alors le changement de variable $s = t^{1/\lambda}$ et grâce à (5) on a

$$\leq C' + C' \int_{t_0}^\infty t^{-\theta p} ||a_0(t)||_{A_0}^p \frac{dt}{t} < +\infty$$

Si $p = +\infty$ on a

$$||s^{-\eta} b_0(s)||_{B_0} \leq C t_0^{\frac{-\eta}{\lambda}} + c ||s^{-\theta \lambda} a_0(s^\lambda)||_{A_0}^\beta \leq c' \quad \text{pour } s > t_0^{1/\lambda}$$

Evaluons maintenant $\int_0^\infty ||s^{1-\eta} b_1(s)||_{B_1}^{p/\alpha} \frac{ds}{s}$

$$= \int_0^{t_0^{1/\lambda}} ||s^{1-\eta} Ta||_{B_1}^{p/\alpha} \frac{ds}{s} + \int_{t_0^{1/\lambda}}^\infty s^{\frac{(1-\eta)p}{\alpha}} ||Ta - Ta_0(s^\lambda)||_{B_1}^{p/\alpha} \frac{ds}{s}$$

mais d'après (2) $||Ta - Ta_0(s^\lambda)||_{B_1} \leq C ||a - a_0(s^\lambda)||_{A_1}^\alpha = c ||a_1(s^\lambda)||_{A_1}^\alpha$

donc la quantité cherchée est, d'après le changement de variable $s = t^{1/\lambda}$

$$\leq C + C \int_{t_0}^{\infty} t^{(1-\theta)p} \|a_1(t)\|_{A_1}^p \frac{dt}{t} < +\infty$$

Si $p = +\infty$ on a une remarque analogue.

On a donc montré (7) $Ta = b_0(t) + b_1(t)$

$$s^{-\eta} b_0(s) \in L_*^{p/\beta}(0, \infty; B_0)$$

$$s^{1-\eta} b_1(s) \in L_*^{p/\alpha}(0, \beta; B_1)$$

On utilise alors la proposition 4 du paragraphe 0 qui dit que $Ta \in (B_0, B_1)_{\eta, q_0}$

avec $\frac{1}{q_0} = \frac{1-\eta}{p/\beta} + \frac{\eta}{p/\alpha}$ donc $q_0 = \frac{p}{(1-\eta)\beta + \eta\alpha}$.

Comme on ne s'intéresse ici qu'au cas $q \geq 1$, on remplace q_0 par $\max(1, q_0)$ c'est à dire par (4).

Il est difficile d'avoir une majoration précise sur $\|Ta\|_{(B_0, B_1)_{\eta, q}}$ à cause de la dépendance de V par rapport à a . On va donner un résultat plus précis dans le cas où V est toujours une boule centrée en 0. Plus précisément on suppose :

(8) T envoie A_1 dans B_1 et A_0 dans B_0

$$\|Ta - Tb\|_{B_1} \leq f(\|a\|_{A_1}, \|b\|_{A_1}) \|a-b\|_{A_1}^{\alpha} \quad \forall a, b \in A_1$$

$$\|Ta\|_{B_0} < g(\|a\|_{A_1}) \|a\|_{A_0}^{\beta} \quad \forall a \in A_0$$

$$f \text{ continue sur } \bar{R}_+^2 \quad g \text{ continue sur } \bar{R}_+$$

THEOREME 2

Sous l'hypothèse (8) si $0 < \theta < 1$; $1 \leq p \leq +\infty$ on a

$$(9) \quad ||Ta||_{(B_0, B_1)_{\eta, q}} < C h(||a||_{A_1}) ||a||_{(A_0, A_1)_{\theta, p}}^{(1-\eta)\beta + \eta\alpha}$$

où η, q sont donnés par (3) et (4) et h par

$$(10) \quad h(t) = g(2t)^{1-\eta} f(t, 2t)^\eta$$

DEMONSTRATION

La démonstration est la même ; il suffit de faire attention aux constantes. Soit

$a \in (A_0, A_1)_{\theta, p}$. Soit $\varepsilon > 0$

$$a = a_0(t) + a_1(t) \quad \text{avec} \quad ||a_0(t)||_{A_0} + t ||a_1(t)||_{A_1} \leq (1+\varepsilon)K(t, a)$$

Comme $a = 0 + a$ on a $K(t, a) \leq t ||a||_{A_1}$

$$\text{Donc} \quad ||a_1(t)||_{A_1} \leq (1+\varepsilon) ||a||_{A_1} \quad \text{et} \quad ||a_0(t)||_{A_1} \leq (2+\varepsilon) ||a||_{A_1}$$

$$\text{On rappelle que} \quad \lambda = \frac{\eta}{\theta\beta} = \frac{1-\eta}{(1-\theta)\alpha}$$

On pose $Ta = b_0(t) + b_1(t)$ avec $b_0(t) = T a_0(t^\lambda)$ pour $t > 0$.

$$\text{Alors} \quad ||b_0(t)||_{B_0} \leq g((2+\varepsilon) ||a||_{A_1}) ||a_0(t^\lambda)||_{A_0}^\beta$$

$$||b_1(t)||_{B_1} = ||a - Ta_0(t^\lambda)||_{B_1}$$

$$\leq f(||a||_{A_1}, (2+\varepsilon) ||a||_{A_1}) ||a_1(t^\lambda)||_{A_1}^\alpha$$

$$\text{Donc} \quad \int_0^\infty ||s^{-\eta} b_0(s)||_{B_0}^{p/\beta} \frac{ds}{s} \leq \frac{g((2+\varepsilon) ||a||_{A_1})^{p/\beta}}{\lambda} \int_0^\infty |t^{-\theta} K(t, a)|^p \frac{dt}{t} \cdot (1+\varepsilon)^p$$

$$\int_0^\infty ||s^{1-\eta} b_1(s)||_{B_1}^{p/\alpha} \frac{ds}{s} \leq \frac{f(||a||_{A_1}, (2+\varepsilon) ||a||_{A_1})^{p/\alpha}}{\lambda} \int_0^\infty |t^{-\theta} K(t, a)|^p \frac{dt}{t} \cdot (1+\varepsilon)^p$$

D'après la proposition 4 paragraphe 0 on a

$$||Ta||_{(B_0, B_1)_{\eta, q}} \leq c ||s^{-\eta} b_0||_{L_{*}^{p/\beta}(B_0)}^{1-\eta} ||s^{1-\eta} b_1||_{L_{*}^{p/\alpha}(B_1)}^{\eta}$$

On fait ensuite tendre ε vers 0 et on a (9) et (10).

1.2. CAS DES MAJORATIONS UNIFORMES

Dans le théorème précédent, si f et g sont des constantes, on obtient pour (9) une majoration uniforme.

On va voir qu'on peut obtenir la même majoration dans des cas où l'on n'a plus $A_0 \subset A_1$

Soit T une application définie sur $A_0 + A_1$ à valeurs dans $B_0 + B_1$ vérifiant (11) $T : A_0 \rightarrow B_0$

si $a, b, \in A_0 + A_1$ et $a-b \in A_1$ alors $Ta - Tb \in B_1$

$$||Ta||_{B_0} \leq c ||a||_{A_0}^{\beta} \quad \forall a \in A_0$$

$$||Ta - Tb||_{B_1} \leq c ||a - b||_{A_1}^{\alpha}, \quad \forall a, b \in A_0 + A_1; a - b \in A_1$$

Dans ces conditions on a le théorème suivant Peetre [3].

THEOREME 3

Sous l'hypothèse (11) si $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq +\infty$ T envoie $(A_0, A_1)_{\theta, p}$ dans $(B_0, B_1)_{\eta, q}$ avec η, q vérifiant (3) (4) et on a

$$(12) \quad ||Ta||_{(B_0, B_1)_{\eta, q}} \leq c ||a||_{(A_0, A_1)_{\theta, p}}^{(1-\eta)\beta + \eta\alpha}$$

DEMONSTRATION

Soit $a \in (A_0, A_1)_{\theta, p}$ $a = a_0(t) + a_1(t)$ pour $t > 0$

avec $||a_0(t)||_{A_0} + t ||a_1(t)||_{A_1} \leq 2K(t, a)$

Posons $Ta = b_0(t) + b_1(t)$ avec $b_0(t) = Ta_0(t^\lambda)$ avec $\lambda = \frac{\eta}{\theta\beta} = \frac{1-\eta}{(1-\theta)\alpha}$

On a $||b_0(t)||_{B_0} \leq c ||a_0(t^\lambda)||_{A_0}^\beta$

On a a et $a_0(t) \in A_0 + A_1$ et $a - a_0(t) = a_1(t) \in A_1$ donc d'après (11)
 $Ta - Ta_0(t) \in B_1$ et donc $b_1(t) \in B_1$

De plus $||b_1(t)||_{B_1} = ||Ta - Ta_0(t^\lambda)||_{B_1} \leq c ||a_1(t^\lambda)||_{A_1}^\alpha$

On termine comme au théorème (1) et (2).

On a aussi le théorème suivant :

THEOREME 4

On suppose qu'on a (11) avec l'hypothèse supplémentaire

(11bis) $||Ta - Tb||_{B_0} \leq c_0 ||a - b||_{A_0}^\beta \quad \forall a, b \in A_0$

$||Ta - Tb||_{B_1} \leq c_1 ||a - b||_{A_1}^\alpha \quad \forall a, b \in A_0 + A_1 : a - b \in A_1$

Alors si $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq +\infty$ on a

(13) $||Ta - Tb||_{(B_0, B_1)_{\eta, q}} \leq c \cdot c_0^{1-\eta} c_1^\eta ||a - b||_{(A_0, A_1)_{\theta, p}}^{(1-\eta)\beta + \eta\alpha} \quad \forall a, b \in (A_0, A_1)_{\theta, p}$

DEMONSTRATION

Soit d'abord $x \in A_0 \cap A_1$ on considère l'application

$Sa = T(a+x) - Tx$

S vérifie (11) avec $||Sa||_{B_0} \leq c_0 ||a||_{A_0}^\beta$

$||Sa - Sb||_{B_1} \leq c_1 ||a - b||_{A_1}^\alpha \quad \text{si } a - b \in A_1$

d'après le théorème précédent (où l'on aurait pu préciser les constantes)

on a

$$||Sa||_{(B_0, B_1)_{\eta, q}} < c C_0^{1-\eta} C_1^{\eta} ||a||_{(A_0, A_1)_{\theta, p}}^{(1-\eta)\beta + \eta\alpha} \quad \forall a \in (A_0, A_1)_{\theta, p}$$

C'est à dire (13) quand par exemple $a \in A_0 \cap A_1$

Mais d'après la proposition 2 du paragraphe 0 (on a supposé que $p < +\infty$)

$A_0 \cap A_1$ est dense dans $(A_0, A_1)_{\theta, p}$.

On choisit pour a et $b \in (A_0, A_1)_{\theta, p}$ une suite a_n de $A_0 \cap A_1$ conver-
geant vers a dans $(A_0, A_1)_{\theta, p}$ et vérifiant

$$||a_n - a||_{(A_0, A_1)_{\theta, p}} \leq 2^{-n} ||a - b||_{(A_0, A_1)_{\theta, p}}$$

Alors d'après le résultat déjà obtenu Ta_n est une suite de Cauchy dans
 $(B_0, B_1)_{\eta, q}$. Comme Ta_n converge vers Ta dans $(B_0, B_1)_{\eta, q}$, puisque d'après le
résultat partiel obtenu on a

$$||Ta_n - Ta||_{(B_0, B_1)_{\eta, q}} \leq c ||a_n - a||_{(A_0, A_1)_{\theta, p}}^{(1-\eta)\beta + \eta\alpha}$$

on déduit que le résultat pour $a, b \in (A_0, A_1)_{\theta, p}$

1.3. GENERALISATIONS

On rencontre dans certaines applications des fonctions définies
sur un produit qui n'ont pas la même croissance par rapport aux différentes
coordonnées. Pour simplifier on traite le cas d'un produit de deux espaces
la généralisation est ensuite immédiate.

Soient $A_0 \subset A_1$, $B_0 \subset B_1$, $C_0 \subset C_1$ des espaces de Banach.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $A_1 \times B_1$ et T une application de $\mathcal{U}$ dans C_1 .

On suppose que

(14) T envoie $A_0 \times B_0 \cap \mathcal{U}$ dans C_0

(15) $\exists \alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta} : \quad 0 < \alpha, \tilde{\alpha} \leq 1, \quad 0 < \beta, \tilde{\beta}$ tels que
 $\forall (a, b) \in \mathcal{U}, \exists \mathcal{V}$ voisinage de (a, b) dans $\mathcal{U}$ et $\exists C \geq 0 :$
 $(a', b') \in \mathcal{V} \Rightarrow ||T(a, b) - T(a', b')||_{C_1} \leq c ||a - a'||_{A_1}^{\alpha} + c ||b - b'||_{B_1}^{\tilde{\alpha}}$
 $(a', b') \in A_0 \times B_0 \cap \mathcal{V} \Rightarrow ||T(a', b')||_{C_0} \leq C (||a'||_{A_0}^{\beta} + ||b'||_{B_0}^{\tilde{\beta}} + 1)$

L'analogue du théorème 1 est alors le suivant :

THEOREME 5

Sous les hypothèses (14)(15), si $(a,b) \in \mathcal{U}_n(A_0, A_1)_{\theta, p} \times (B_0, B_1)_{\tilde{\theta}, \tilde{p}}$

avec $0 < \theta, \tilde{\theta} < 1$, $1 \leq p, \tilde{p} \leq +\infty$

alors $T(a,b) \in (C_0, C_1)_{\eta, q} + (C_0, C_1)_{\tilde{\eta}, \tilde{q}} = (C_0, C_1)_{\xi, r}$

où $\frac{1-\eta}{\eta} = \frac{1-\theta}{\theta} \frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{1-\tilde{\eta}}{\tilde{\eta}} = \frac{1-\tilde{\theta}}{\tilde{\theta}} \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}$

$$q = \max \left(1, \frac{p}{(1-\eta)\beta + \eta\alpha} \right); \quad \tilde{q} = \max \left(1, \frac{\tilde{p}}{(1-\tilde{\eta})\tilde{\beta} + \tilde{\eta}\tilde{\alpha}} \right)$$

si $\eta < \tilde{\eta}$ on a $\xi = \tilde{\eta}$ et $r = \tilde{q}$; si $\eta > \tilde{\eta}$ on a $\xi = \eta$ et $r = q$;
si $\eta = \tilde{\eta}$ on a $\xi = \eta = \tilde{\eta}$ et $r = \max(q, \tilde{q})$.

DEMONSTRATION

$(C_0, C_1)_{\eta, q} + (C_0, C_1)_{\tilde{\eta}, \tilde{q}} = (C_0, C_1)_{\xi, r}$ découle de la proposition 2 du paragraphe 0 et du fait général que $X_0 \subset X_1$, $0 < \lambda < \lambda' < 1 \Rightarrow (X_0, X_1)_{\lambda, \pi} \subset (X_0, X_1)_{\lambda', \pi}$.

Soit $a \in (A_0, A_1)_{\theta, p} \times (B_0, B_1)_{\tilde{\theta}, \tilde{p}} \cap \mathcal{U}$

Pour ces raisons on a $a \in (A_0, A_1)_{\theta', p'}$ où $\frac{1-\xi}{\xi} = \frac{1-\theta'}{\theta'} \frac{\alpha}{\beta}$

et $r = \max \left(1, \frac{p'}{(1-\xi)\beta + \xi\alpha} \right)$.

D'après la proposition 3 du paragraphe 0 on peut écrire

$$a = a_0(t) + a_1(t) \quad \text{pour } t > 0 \quad \text{avec}$$

$$\|a_0(t)\|_{A_0}^{\beta} + t \|a_1(t)\|_{A_1}^{\alpha} \leq 2 L(\beta, \alpha, t, a)$$

avec $t^{-\xi} L(\beta, \alpha, t, a) \in L_{*}^r(0, \infty)$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \|a_1(t)\|_{A_1} = 0$

De même $b = b_0(t) + b_1(t)$ pour $t > 0$ avec

$$\|b_0(t)\|_{B_0}^{\tilde{\beta}} + t \|b_1(t)\|_{B_1}^{\tilde{\alpha}} \leq 2 L(\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}, t, b)$$

avec $t^{-\tilde{\xi}} L(\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}, t, b) \in L_{*}^r(0, \infty)$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \|b_1(t)\|_{B_1} = 0$

Donc pour $t > t_0 > 0$ on a $(a_0(t), b_0(t)) \in \mathcal{V}$ défini dans (15).

Posons alors
$$C_0(t) = \begin{cases} T(a_0(t), b_0(t)) & \text{pour } t > t_0 \\ 0 & \text{pour } 0 < t \leq t_0 \end{cases}$$

Pour $t > t_0$ on a d'après (15)

$$\|C_0(t)\|_{C_0} \leq C \|a_0(t)\|_{A_0}^\beta + C \|a_0(t)\|_{B_0}^{\tilde{\beta}} + C$$

et donc $t^{-\xi} C_0(t) \in L_*^r(0, \infty; C_0)$

De même
$$\begin{aligned} \|T(a, b) - C_0(t)\|_{C_1} &\leq C \|a - a_0(t)\|_{A_1}^\alpha + C \|b - b_0(t)\|_{B_1}^{\tilde{\alpha}} \\ &\leq C \|a_1(t)\|_{A_1}^\alpha + C \|b_1(t)\|_{B_1}^{\tilde{\alpha}} \end{aligned}$$

et donc $t^{1-\xi} C_1(t) \in L_*^r(0, \infty; C_1)$ avec $C_1(t) = T(a, b) - C_0(t)$.

Par conséquent on a $T(a, b) \in (C_0, C_1)_{\xi, r}$

Pour terminer ce paragraphe nous allons montrer une généralisation non linéaire d'un théorème d'interpolation d'applications bilinéaires dû à Lions [1].

Soient $A_0 \subset A_1$, $B_0 \subset B_1$, $C_0 \subset C_1$ des espaces de Banach.

Soit T une application vérifiant

$$\begin{aligned} (16) \quad T : A_0 \times B_0 &\rightarrow C_0 : \|T(a, b)\|_{C_0} \leq C \|a\|_{A_0} \|b\|_{B_0} \quad \forall a \in A_0, b \in B_0 \\ T : A_0 \times B_1 &\rightarrow C_1 : \|T(a, b) - T(a, b_1)\|_{C_1} \leq C \|a\|_{A_0} \|b - b_1\|_{B_1} \\ T : A_1 \times B_0 &\rightarrow C_1 : \|T(a, b) - T(a_1, b)\|_{C_1} \leq C \|a - a_1\|_{A_1} \|b\|_{B_0} \end{aligned}$$

(17) si $a_n \rightarrow a$ dans A_1 , $b_n \rightarrow b$ dans B_1 , $T(a_n, b_n) \rightarrow C$ dans C_1 alors $T(a, b) = C$.

THEOREME 6

Sous les hypothèses (16)(17) si $a \in (A_0, A_1)_{\theta, p}$, $b \in (B_0, B_1)_{\eta, q}$
avec $0 < \theta, \eta < 1$, $\theta + \eta < 1$ $1 \leq p, q \leq +\infty$

alors $T(a, b) \in (C_0, C_1)_{\theta+\eta, r}$ où $r = \max(1, \frac{pq}{p+q})$.

et $||T(a, b)||_{(C_0, C_1)_{\theta+\eta, r}} < C ||a||_{(A_0, A_1)_{\theta, p}} ||b||_{(B_0, B_1)_{\eta, q}}$

DEMONSTRATION

Pour $k \in \mathbb{Z}$ soit $a = a_0(e^k) + a_1(e^k)$

avec $||a_0(e^k)||_{A_0} + e^k ||a_1(e^k)||_{A_1} \leq 2K(e^k, a)$.

De même $b = b_0(e^k) + b_1(e^k)$ avec $||b_0(e^k)||_{B_0} + e^k ||b_1(e^k)||_{B_1} \leq 2K(e^k, b)$.

D'une manière générale pour $x \in X_0 + X_1$ on peut montrer que $\frac{K(t, x)}{t}$
décroît.

On a donc $\frac{K(e^{k+1}, a)}{e^{k+1}} \leq \frac{K(e^k, a)}{e^k}$

donc $||a_1(e^{k+1}) - a_1(e^k)||_{A_1} \leq ||a_1(e^{k+1})||_{A_1} + ||a_1(e^k)||_{A_1}$
 $\leq \frac{2K(e^{k+1}, a)}{e^{k+1}} + \frac{2K(e^k, a)}{e^k} \leq \frac{4K(e^k, a)}{e^k}$.

De même $||b_1(e^{k+1}) - b_1(e^k)||_{B_1} \leq \frac{4K(e^k, b)}{e^k}$

Comme $\frac{K(t, x)}{t}$ décroît il est facile de voir que

$$(18) \quad \begin{aligned} a \in (A_0, A_1)_{\theta, p} &\Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} (e^{-k\theta} K(e^k, a))^p < +\infty \\ b \in (B_0, B_1)_{\eta, q} &\Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} (e^{-k\eta} K(e^k, b))^q < +\infty \end{aligned}$$

Posons $C(e^k) = T(a_0(e^k), b_0(e^k))$

$$||C(e^k)||_{C_0} \leq C ||a_0(e^k)||_{A_0} ||b_0(e^k)||_{B_0} \leq CK(e^k, a) K(e^k, b).$$

ce qui avec (18) et compte tenu de la proposition 2 du paragraphe 0 implique

$$(19) \quad \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (e^{-k(\theta+\eta)} \|C(e^k)\|_{C_0})^r \right)^{1/r} \leq C \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, p}} \|b\|_{(B_0, B_1)_{\eta, q}}$$

$$\begin{aligned} \text{Evaluons } \|C(e^{k+1}) - C(e^k)\|_{C_1} &\leq \|T(a_0(e^{k+1}), b_0(e^{k+1})) - T(a_0(e^{k+1}), b_0(e^k))\|_{C_1} \\ &\quad + \|T(a_0(e^{k+1}), b_0(e^k)) - T(a_0(e^k), a_0(e^k))\|_{C_1} \end{aligned}$$

$$\leq C \|a_0(e^{k+1})\|_{A_0} \|b_0(e^{k+1}) - b_0(e^k)\|_{B_1} + C \|a_0(e^{k+1}) - a_0(e^k)\|_{A_1} \|b_0(e^k)\|_{B_0}$$

mais $a_0(e^{k+1}) - a_0(e^k) = -(a_1(e^{k+1}) - a_1(e^k))$ et donc on obtient

$$\begin{aligned} \|C(e^{k+1}) - C(e^k)\|_{C_1} &\leq C K(e^{k+1}, a) \frac{K(e^k, b)}{e^k} + C \frac{K(e^k, a)}{e^k} K(e^k, b) \\ &\leq C \frac{K(e^k, a) K(e^k, b)}{e^k} \quad \text{et donc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (20) \quad \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (e^{k(1-\theta-\eta)} \|C(e^{k+1}) - C(e^k)\|_{C_1})^r \right)^{1/r} \\ \leq C \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, p}} \|b\|_{(B_0, B_1)_{\eta, q}} \end{aligned}$$

Ceci entraîne d'abord que $C(e^k)$ est une suite de Cauchy dans C_1 quand $k \rightarrow +\infty$ (car $\theta + \eta < 1$).

Comme on a $a_0(e^k) \rightarrow a$ dans A_1 quand $k \rightarrow \infty$

$b_0(e^k) \rightarrow b$ dans B_1 quand $k \rightarrow \infty$

on en déduit d'après (17) que $C(e^k) \rightarrow T(a, b)$ dans C_1 quand $k \rightarrow \infty$.

Considérons alors la fonction $C(t)$ qui vaut $C(e^k)$ pour $t = e^k$ et qui est linéaire sur les intervalles (e^k, e^{k+1})

Alors on a $C(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow 0$ et $C(t) \rightarrow T(a, b)$ si $t \rightarrow \infty$

D'autre part il est facile de voir que (19) et (20) signifient

$$(19 \text{ bis}) \quad ||t^{-(\theta+\eta)} C(t)||_{L_{\infty}^r(0, \infty; C_0)} \leq C ||a||_{(A_0, A_1)_{\theta, p}} ||b||_{(B_0, B_1)_{\eta, q}}$$

$$(20 \text{ bis}) \quad ||t^{1-(\theta+\eta)} \frac{dC}{dt}(t)||_{L_{\infty}^r(0, \infty; C_1)} \leq C ||a||_{(A_0, A_1)_{\theta, p}} ||b||_{(B_0, B_1)_{\eta, q}}$$

D'où on obtient le résultat d'après Lions-Peetre [1] et l'équivalence entre les espaces de trace et les espaces d'interpolation de la méthode de K : Peetre [2].

II. - APPLICATIONS A DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES LINEAIRES

On considère dans ce paragraphe des équations linéaires : $Au = f$ et on s'intéresse à l'application $(A, f) \rightarrow u$.

LEMME 1

Si $A \in \mathcal{L}(V, W)$ est un isomorphisme de V sur W (V et W Banachs) et $f \in W$ alors $\exists \varepsilon > 0, C > 0$.

$$||A-B||_{\mathcal{L}(V, W)} + ||f-g||_W \leq \varepsilon \Rightarrow ||B^{-1}g - A^{-1}f||_V \leq C(||A-B||_{\mathcal{L}(V, W)} + ||f-g||_W)$$

DEMONSTRATION

$$\text{Soit } \varepsilon = \frac{1}{2||A^{-1}||_{\mathcal{L}(W, V)}}$$

$$\text{Alors si } ||B-A||_{\mathcal{L}(V, W)} \leq \varepsilon \text{ on a } ||B^{-1}||_{\mathcal{L}(W, V)} \leq 2||A^{-1}||_{\mathcal{L}(W, V)}$$

$$\text{Si } Au = f \text{ et } Bv = g \text{ et } ||g-f|| \leq \varepsilon \text{ on a}$$

$$\begin{aligned} ||v-u||_V &\leq ||A^{-1}||_{\mathcal{L}(W, V)} ||Au-Av||_W \leq ||A^{-1}||_{\mathcal{L}(W, V)} ||g-f + (A-B)v||_W \\ &\leq ||A^{-1}||_{\mathcal{L}(W, V)} ||g-f||_W + ||A^{-1}||_{\mathcal{L}(W, V)} ||A-B||_{\mathcal{L}(V, W)} ||v||_V \end{aligned}$$

$$\text{Mais } ||v||_V \leq ||B^{-1}||_{\mathcal{L}(W, V)} ||g||_W \leq 2||A^{-1}||_{\mathcal{L}(W, V)} (||f||_W + \varepsilon)$$

on a donc le lemme avec $C = 2||A^{-1}||_{\mathcal{L}(W, V)}^2 ||f||_W + ||A^{-1}||_{\mathcal{L}(W, V)}$

EXEMPLE 1

Pour les définitions et propriétés, Geymonat-Grisvard [1], Lions-Magenès [1].

Soit $A = \sum_{|h| \leq 2m} a_h(x) D^h$ un opérateur proprement elliptique sur $\bar{\Omega}$. (Ω ouvert borné de R^n de frontière régulière).

Soient $B_j = \sum_{|k| \leq m_j} b_{j,k}(x') D^k$ ($1 \leq j \leq m$; $0 \leq m_j \leq 2m-1$) m opérateurs frontière formant un système normal recouvrant A en tout point de $\partial\Omega$.

Si les coefficients a_h sont de classe $C^r(\bar{\Omega})$ et les coefficients $b_{j,k}$ de classe $C^{r+2m-m_j}(\partial\Omega)$ alors $L = (A, B_j, j=1 \dots m)$ est un opérateur à indice de $X_r = W^{2m+r,p}(\Omega)$ dans $Y_r = W^{r,p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^m W^{2m+r-m_j-1/p,p}(\partial\Omega)$ avec r entier ≥ 0 et $1 < p < +\infty$.

donc (1) $\exists \alpha_r > 0, \beta_r \geq 0 : \|u\|_{X_r} \leq \alpha_r \|Lu\|_{Y_r} + \beta_r \|u\|_{X_{r-1}}$

Si les coefficients a_h sont de classe $C^{r+1}(\bar{\Omega})$ et les coefficients $b_{j,k}$ de classe $C^{r+1+2m-m_j}(\partial\Omega)$ il est utile de majorer α_{r+1} et β_{r+1} en fonction de α_r et β_r .

Posons (2) $\chi = \inf_{|h|=2m} \left| \sum a_h(x) \xi^h \right|$ pour $x \in \bar{\Omega}$ et $\sum \xi_i^2 = 1$
D'après l'ellipticité, on a $\chi > 0$.

On a (3) $\exists C$ dépendant de Ω (par l'intermédiaire d'une partition de l'unité et des cartes subordonnées)

$$\|u\|_{X_{r+1}} \leq C \chi^{-1} \alpha_r \|Lu\|_{Y_{r+1}} + C \chi^{-1} (\beta_r + \sum \|a_h\|_{C^{r+1}} + \|b_{jk}\|_{C^{r+1+2m-m_j}}) \|u\|_{X_r}$$

En effet, soient Ω_i un recouvrement ouvert fini de $\bar{\Omega}$, θ_i des cartes subordonnées et φ_i une partition de l'unicité
Soient $\tilde{A}, \tilde{B}_j$ les opérateurs transportés sur $\theta_i(\Omega_i)$.

Il suffit de montrer (3) pour chaque fonction $\varphi_i u$. Par θ_i on se ramène à un problème sur R^n ou sur R^n_+ suivant que $\Omega_i \cap \partial\Omega$ est vide ou non.

On est donc ramené à montrer (3) sur R^n_+ avec $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$. χ est remplacé par l'expression analogue sur $\tilde{A}$ et on a $C\chi \leq \tilde{\chi} \leq C'\chi$.

Si $\frac{\partial}{\partial \xi}$ est une dérivation tangentielle.

$$|| [\tilde{A}, \frac{\partial}{\partial \xi}] u ||_{W^{r,p}} \leq C \sum || \tilde{a}_h ||_{C^{r+1}} || u ||_{X_r}$$

$$\text{et } || [\tilde{B}_j, \frac{\partial}{\partial \xi}] u ||_{W^{2m+r-m_j-\frac{1}{p},p}} \leq C \sum || \tilde{b}_{jk} ||_{C^{r+1+2m-m_j}} || u ||_{X_r}$$

Par conséquent $|| \frac{\partial u}{\partial \xi} ||_{X_r}$ est majoré par une quantité analogue à (3).

Pour majorer u dans X_{r+1} il suffit alors d'avoir une estimation de $D^{(0, \dots, 0, 2m+1)}_u$.

L'équation donne la majoration cherchée pour $a_{(0, \dots, 0, 2m)}^{(x)} D^{(0, \dots, 0, 2m+1)}_u$ mais comme $|a_{00 \dots 2m}| \geq \tilde{\chi}$ on a l'inégalité voulue.

On considère alors

$$A_1 = \{(a_h, b_{j,k}, f, g_j) \mid a_h \in C^r(\bar{\Omega}), b_{j,k} \in C^{r+2m-m_j}(\partial\Omega), (f, g_j) \in Y_r\}$$

$$B_1 = X_r$$

Soit U l'ensemble des éléments de A_1 tels que $(a_h, b_{j,k})$ définissent un opérateur proprement elliptique sur $\bar{\Omega}$ et un système B_j normal recouvrant A sur $\partial\Omega$ et qui soit tel que (A, B_j) définisse un isomorphisme de X_r sur Y_r .

U est ouvert dans A_1 (continuité des racines d'un polynôme par rapport aux coefficients).

On considère l'application T définie sur U par

$$T(a_h, b_{j,k}, f, g_j) = u \text{ solution de } (Au = f, B_j u = g_j).$$

$$A_0 = \{(a_h, b_{j,k}, f, g_j) \mid a_h \in C^{r+1}(\bar{\Omega}), b_{j,k} \in C^{r+1+2m-m_j}(\partial\Omega), (f, g_j) \in Y_{r+1}\}$$

$$B_0 = X_{r+1}$$

Pour définir le voisinage V nécessaire pour l'application du théorème I on utilise le lemme 1 et on suppose V assez petit pour que $0 < C \leq \chi \leq C' < +\infty$ sur V . Alors on a le

THEOREME 1

Si a_h, b_{jk}, f, g_j vérifient

$$(4) \quad a_h \in (C^{r+1}(\overline{\Omega}), C^r(\Omega))_{\theta, q} ; b_{jk} \in (C^{r+1+2m-m_j}(\partial\Omega), C^{r+2m-m_j}(\partial\Omega))_{\theta, q}$$

$$(5) \quad f \in (W^{r+1, p}(\Omega), W^{r, p}(\Omega))_{\theta, q} ; g_j \in (W^{2m+r+1-m_j-1/p, p}(\partial\Omega), W^{2m+r-m_j-1/p, p}(\partial\Omega))_{\theta, q}$$

et si (A, B_j) est un isomorphisme de X_r sur Y_r , alors la solution de $(Au = f, B_j u = g_j)$ vérifie

$$(6) \quad u \in (W^{2m+r+1, p}(\Omega), W^{2m+r, p}(\Omega))_{\theta, q}$$

pour $0 < \theta < 1 ; 1 \leq q \leq +\infty$.

REMARQUE 1

(4) est vérifié si $a_h \in C^{r, \theta'}(\overline{\Omega})$ avec $1 \geq \theta' > \theta$
 $C^{r, \theta'}(\cdot)$ désignant l'espace des fonctions dont les dérivées d'ordre r sont höldériennes d'exposant θ' .

De même (4) est vérifié si $b_{j,k} \in C^{r+2m-m_j, \theta'}(\partial\Omega)$ $1 \geq \theta' > \theta$

REMARQUE 2

Sous l'hypothèse (4) si (A, B_j) définit un isomorphisme de X_r sur Y_r alors c'est un isomorphisme de $(X_{r+1}, X_r)_{\theta, q}$ sur $(Y_{r+1}, Y_r)_{\theta, q}$

EXEMPLE 2

Soit $V = H_0^1(\Omega)$ Ω ouvert borné régulier de R^n .

$$a(u, v) = \sum_{i,j} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \sum_i \int_{\Omega} (a_i u \frac{\partial v}{\partial x_i} + b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v) dx + \int_{\Omega} a_0 u v dx$$

On suppose que $a_{i,j}, a_i, b_i, a_0 \in L^\infty(\Omega)$ de sorte que $a(u, v) = \langle Au, v \rangle$

avec $A \in \mathcal{L}(V, V')$

on fait l'hypothèse qu'il existe $\alpha > 0 : a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in V$
 Alors A est un isomorphisme de V sur V' et $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(V', V)} \leq \frac{1}{\alpha}$

Si les $a_{i,j}, a_i, b_i, a_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ (fonctions lipschiziennes sur $\bar{\Omega}$) alors A est un isomorphisme de $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$. De plus, comme dans l'exemple 1 on a

$$\|u\|_{H^2} \leq \frac{C}{\alpha} \|Au\|_{L^2} + C \left(\sum_k \left\| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \right\|_{L^\infty} + \left\| \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right\|_{L^\infty} + \left\| \frac{\partial b_i}{\partial x_k} \right\|_{L^\infty} \right) \|u\|_{H_0^1}$$

On a le :

THEOREME 2

Si $a(u,u) \geq \alpha \|u\|_{H_0^1}^2$ et si les coefficients vérifient

$$(7) \quad a_{ij}, a_i, b_i, a_0 \in (W^{1,\infty}(\Omega); L^\infty(\Omega))_{\theta,p} \quad \text{avec } 0 < \theta < 1 \quad 1 \leq p \leq +\infty$$

Alors A est un isomorphisme de $(H^2 \cap H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega))_{\theta,p}$ sur $(L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega))_{\theta,p}$

EXEMPLE 3.1.

Soient V et H deux espaces de Hilbert. V inclus et dense dans H.

Soit $\mathcal{A} \in L^\infty(0, \infty; \mathcal{L}(V, V'))$ vérifiant $(\mathcal{A}(t)u, u) \geq \alpha \|u\|^2$, $\alpha > 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall u \in V$

On considère le problème

$$(8) \quad \frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = f$$

$$u(0) = 0$$

Sous ces hypothèses $\frac{d}{dt} + \mathcal{A}$ est un isomorphisme de $L^2(0, \infty; V) \cap H_0^1(0, \infty; V')$ sur $L^2(0, \infty; V')$. Lions [2], Lions-Magenès [1].

On a aussi le théorème de régularité suivant : si $\mathcal{A} \in W^{k,\infty}(0, \infty; \mathcal{L}(V, V'))$ alors $\frac{d}{dt} + \mathcal{A}$ est un isomorphisme de $H_0^k(0, \infty; V) \cap H_0^{k+1}(0, \infty; V')$ sur $H_0^k(0, \infty; V')$, k entier ≥ 1 .

En dérivant k fois l'équation (8) on obtient

$$(9) \quad \|u^{(k)}\|_{L^2(V)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f^{(k)}\|_{L^2(V')} + C \|\mathcal{A}\|_{W^{k,\infty}(\mathcal{L}(V, V'))} \|u\|_{L^2(V)}$$

On considère alors $A_1 = H_0^k(0, \infty; V) \times W^{k,\infty}(0, \infty; \mathcal{L}(V, V'))$

$$B_1 = H_0^k(0, \infty; V) \times H_0^{k+1}(0, \infty; V')$$

A_0 et B_0 obtenus en remplaçant k par $k+1$.

Alors compte tenu de ce qui précède on a le

THEOREME 3

Si $A \in (W^{k+1/2}_0(0, \infty; \mathcal{L}(V, V')), W^{k+1/2}_0(0, \infty; \mathcal{L}(V, V'))_{\theta, p}$, $0 < \theta < 1$; $1 \leq p \leq +\infty$
 et si $(A(t)u, u) \geq \alpha \|u\|^2$ alors $\frac{d}{dt} + A$ est un isomorphisme de
 $(H^{k+1}_0(0, \infty; V), H^k_0(0, \infty; V))_{\theta, p} \cap (H^{k+2}_0(0, \infty; V'), H^{k+1}_0(0, \infty; V'))_{\theta, p}$
 sur $(H^{k+1}_0(0, \infty; V'), H^k_0(0, \infty; V'))_{\theta, p}$

COROLLAIRE

Si $1 \geq \lambda > s > 0$ $s \neq \frac{1}{2}$. $A \in C^{k, \lambda}(0, \infty; \mathcal{L}(V, V'))$ alors $\frac{d}{dt} + A$
 est un isomorphisme de

$$H^{k+s}_0(0, \infty; V) \cap H^{k+s+1}_0(0, \infty; V') \text{ sur } H^{k+s}_0(0, \infty; V')$$

Pour $s = \frac{1}{2}$ il faut considérer $u \in H^{k+1/2}_0(0, \infty; V) \cap H^{k+3/2}_0(0, \infty; V')$

avec $\frac{u}{t^{k+3/2}} \in L^2(0, \infty; V')$ et $f \in H^{k+1/2}_0(0, \infty; V')$ avec $\frac{f}{t^{k+1/2}} \in L^2(0, \infty; V')$.

Lions-Magenès [1] .

EXEMPLE 3.2.

Même problème que l'exemple 3.1.

Si $A \in H^1(0, \infty; \mathcal{L}(V, V'))$ et $f \in H^1_0(0, \infty; V')$ alors $u \in H^1_0(0, \infty; V) \cap H^2_0(0, \infty; V')$

En effet, dérivant l'équation (8) et multipliant par u' on a

$$\alpha \|u'\|_{L^2(V)}^2 \leq \|f'\|_{L^2(V')} \|u'\|_{L^2(V')} + \|u\|_{L^\infty(V)} \int_0^\infty \|A'\|_{\mathcal{L}(V, V')} \|u'\|_V$$

$$\text{mais } \|u\|_{L^\infty(V)}^2 \leq 2 \|u\|_{L^2(V)} \|u'\|_{L^2(V)}$$

d'où l'on déduit après quelques calculs

$$(10) \quad \|u'\|_{L^2(V)} \leq C(\alpha) \left(\|f'\|_{L^2(V')} + \|u\|_{L^2(V)} \|A'\|_{L^2(\mathcal{L}(V, V'))}^2 \right)$$

On peut alors appliquer le théorème 5 du paragraphe I puisque la dépendance en f et A est différente.

On obtient alors le

THEOREME 4

Soit $0 < \theta < 1$; $1 \leq p \leq +\infty$. On définit η, q par $\frac{1-\eta}{\eta} = 2 \frac{1-\theta}{\theta}$ et $q = (2-\theta)p$.

Alors si $A \in (H^1(0, \infty; \mathcal{L}(V, V')), L^\infty(0, \infty; \mathcal{L}(V, V')))_\eta, q$

$\frac{d}{dt} + A$ est isomorphisme de $(H_0^1(0, \infty; V); L^2(0, \infty; V))_{\theta, p} \cap (H_0^2(0, \infty; V'), H_0^1(0, \infty; V'))_{\theta, p}$
sur $(H_0^1(0, \infty; V'); L^2(0, \infty; V'))_{\theta, p}$

EXEMPLE 3.3.

Même problème que les deux exemples précédents

Si $A \in H^1(0, \infty; \mathcal{L}(V, V'))$ et $f \in L^2(0, \infty; V)$ alors $Au \in L^2(0, \infty; V)$.

En effet, on applique A à l'équation (8) et on multiplie par Au , on obtient

$$\alpha \|Au\|_{L^2(V)}^2 \leq \|Af\|_{L^2(V')} \|Au\|_{L^2(V)} + \|u\|_{L^\infty(V)} \int_0^\infty \|A'\|_{\mathcal{L}(V, V')} \|Au\|_V dt$$

d'où

$$(11) \quad \|Au\|_{L^2(V)} \leq C(\alpha; \|A\|_{L^\infty(0, \infty; \mathcal{L}(V, V'))}) (\|f\|_{L^2(V)} + \|u\|_{L^2(V)} \|A'\|_{L^2(0, \infty; \mathcal{L}(V, V'))}^2)$$

On applique à nouveau le théorème 5 du paragraphe I, mais on s'intéresse surtout au cas $\theta = \frac{1}{2}$, $p = 2$ qui donne le

THEOREME 5

Si $A \in (H^1(0, \infty; \mathcal{L}(V, V')), L^\infty(0, \infty; \mathcal{L}(V, V')))_\eta, q$ alors $\frac{d}{dt} + A$ est un isomorphisme de

$$H_0^1(0, \infty; H) \cap L^2(0, \infty; D(A)) \text{ sur } L^2(0, \infty; H)$$

$$L^2(0, \infty; D(A)) = \{u \in L^2(0, \infty; H) : Au \in L^2(0, \infty; H)\}$$

III - APPLICATION A DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES NON LINEAIRES

On considère dans ce paragraphe des équations non linéaires $Au = f$ mais on considère l'application $f \rightarrow u$.

EXEMPLE 1

Soient $a_{ij}, a_0 \in L^\infty(\Omega)$, Ω ouvert borné de R^n , vérifiant

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_i \xi_i^2 \quad ; \quad a_0(x) \geq \alpha > 0$$

Soit β un graphe maximal monotone sur R : $0 \in \beta(0)$ Cf Brézis [1].

Soit B la fonction convexe sur R de sous-gradient β et telle que $B(0) = 0$.

$$\text{On pose } a(u,v) = \sum_{i,j} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a_0 u v dx \quad \text{pour } u, v \in H_0^1(\Omega)$$

Pour $f \in H^{-1}(\Omega)$ il existe u unique tel que

$$(1) \quad a(u, v-u) + B(v) - B(u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in H_0^1 \quad \text{Brézis [2]}$$

La solution vérifie

$$(2) \quad -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u + \beta(u) \ni f. \quad \text{si } f \in L^2(\Omega) \text{ par exemple}$$

$$\text{On a aisément} \quad \|u_1 - u_2\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\alpha} \|f_1 - f_2\|_{H^{-1}}$$

Si $f \in L^2(\Omega)$ on a $\beta(u) \in L^2(\Omega)$ et

$$(3) \quad \|\beta(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{Brézis [1]}$$

Donc si on pose $\langle Au, v \rangle = a(u, v)$ on a le

THEOREME 1

Si $f \in (L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega))_{\theta, p}$ on a $Au \in (L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega))_{\theta, p}$

On utilise ensuite un théorème du paragraphe précédent pour avoir la régularité de u .

Si $f \in L^p(\Omega)$ $1 \leq p \leq +\infty$ on a $\beta(u) \in L^p(\Omega)$ et $\|\beta(u)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}$

On peut donc interpoler entre $L^p(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$

EXEMPLE 2

Même exemple avec $\beta(u) = |u|^{p-2}u$ $p > 1$

Le cas intéressant est le cas $p > 2$

Si $p \geq 2$ on a $(\beta(u) - \beta(v), u - v) \geq C|u - v|^p$

On a donc $\|u_1 - u_2\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|f_1 - f_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^{2/p}$

d'où le théorème

THEOREME 2

Si $\beta(u) = |u|^{p-2}u$ avec $p > 2$ si $f \in (L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega))_{\theta, q}$
alors $u \in (L^{2(p-1)}(\Omega), L^p(\Omega))_{\eta, r}$ où $\frac{1-\eta}{\eta} = \frac{1-\theta}{\theta} \frac{2}{p}$, et $\frac{1}{r} = \frac{p+\eta(p-2)}{pq(p-1)}$

De même on a des résultats en interpolant entre $L^q \cap H^{-1}(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$

Si $1 < p \leq 2$ on a $(\beta(u) - \beta(v), u - v) \geq \frac{C|u - v|^2}{(|u| + |v|)^{2-p}}$

de sorte qu'on obtient $\|u - v\|_{L^p} \leq C(\|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p})^{2-p} \|f - g\|_{L^p}$

Si on supprime Ω borné ((3) est encore valable) on obtient

THEOREME 3

Si $\beta(u) = |u|^{p-2}u$ avec $1 < p < 2$, si $f \in (L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega))_{\theta, q}$
alors $u \in (L^{2(p-1)}(\Omega), L^p(\Omega))_{\eta, r}$ où $\frac{1-\eta}{\eta} = \frac{1-\theta}{\theta} (p-1)$ et $\frac{1}{r} = \frac{1-(2-p)\eta}{q(p-1)}$

EXEMPLE 3

A comme dans l'exemple 1.

On veut résoudre $\frac{du}{dt} + Au + |u|^{p-2}u = f$

$$u(0) = 0$$

On suppose $p > 2$ par exemple

On a alors
$$\|u_1 - u_2\|_{L^2(H_0^1) \cap L^\infty(L^2)} \leq C \|f_1 - f_2\|_{L^2(H^{-1})}$$

et
$$\|u_1 - u_2\|_{L^p(L^p)} \leq C \|f_1 - f_2\|_{L^2(H^{-1})}^{2/p}$$

De plus si $f \in L^2(L^2(\Omega))$ on a
$$\| |u|^{p-2} u \|_{L^2(L^2(\Omega))} \leq C \|f\|_{L^2(L^2(\Omega))}$$

On obtient un théorème analogue à celui des exemples précédents.

B I B L I O G R A P H I E

- BREZIS H. [1] Thèse, Paris 1971.
[2] Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité. Annales Institut Fourier 18 (1968) 115-175.
- BUTZER P.L - BERENS H. [1] Semi-groups of operators and approximation. Springer Verlag 1967.
- GEYMONAT, G - GRISVARD P. [1] Problèmes aux limites elliptiques dans L^p . Séminaire Fac. des Sciences Orsay. Janvier-Mars 1964.
- LIONS J.L. [1] Communication personnelle.
[2] Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. Springer-Verlag 1961.
- LIONS J.L - MAGENES E. [1] Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol.1 - Dunod Paris 1968.
- LIONS J.L - PEETRE J. [1] Sur une classe d'espaces d'interpolation. I.H.E.S. Publ. Mat. 19(1964) 5-68.
- PEETRE J. [1] A theory of interpolation of normed spaces. Notas de Matematica 39(1968) Brésil.
[2] A new approach in interpolation spaces. Studia Mathematica 34(1970) 23-42.
[3] Interpolation of Lipschitz operators and metric spaces. Mathematica. Cluj.

INTRODUCTION

Dans cet article on se propose d'étudier certaines propriétés d'interpolation d'ensembles du type : " $|u|^\lambda u \in \text{espace de Sobolev}$ ".

Dans une première partie on introduit deux méthodes permettant de définir des espaces intermédiaires. Ces méthodes sont calquées sur la méthode des traces d'une part et la méthode K d'autre part. Dans la situation envisagée on montre que les deux familles d'ensembles ainsi construits coïncident.

Dans une seconde partie on caractérise les espaces obtenus pour certaines valeurs des paramètres.

0 - RAPPELS

On rappelle dans ce paragraphe quelques résultats d'interpolation linéaire et non linéaire qui nous seront utiles. Cf. Peetre [1][2][3]. Grisvard [1] .

Définition 1 : Soient A_0, A_1 deux espaces de Banach plongés dans un espace localement convexe $\mathcal{E}$. Pour tout élément a de $A_0 + A_1$ on pose

$$(1) \quad K(t, a) = \inf \{ a = a_0 + a_1, a_0 \in A_0, a_1 \in A_1 \mid \|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1} \}$$

Définition 2 : Si $0 < \theta < 1$; $1 \leq p \leq +\infty$ on note $(A_0, A_1)_{\theta, p}$ l'espace

$$(2) \quad \{ a \mid t^{-\theta} K(t, a) \in L_*^p(0, \infty) = L^p(0, \infty; \frac{dt}{t}) \} \text{ muni de la norme}$$

$$\|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, p}} = \|t^{-\theta} K(t, a)\|_{L_*^p(0, \infty)}$$

Définition 3 : Soit $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$, $1 \leq p_0, p_1 \leq +\infty$; $\alpha_0 + \frac{1}{p_0} > 0$;

$\alpha_1 + \frac{1}{p_1} < 1$. On note $T(\alpha_0, p_0, \alpha_1, p_1, A_0, A_1)$ l'espace des traces

$u(0)$ des fonctions vérifiant

$$(3) \quad \begin{cases} t^{\alpha_0} u \in L^{p_0}(0, \infty; A_0) \\ t^{\alpha_1} \frac{du}{dt} \in L^{p_1}(0, \infty; A_1) \end{cases} \text{ muni de la norme quotient}$$

$$\begin{aligned} \|a\|_T &= \inf \left\{ a = u(0) \mid u \text{ vérifiant (3)} \left\| t^{\alpha_0} u \right\|_{L^{p_0}(A_0)} + \left\| t^{\alpha_1} \frac{du}{dt} \right\|_{L^{p_1}(A_1)} \right\} \\ &= \inf \left\{ a = u(0) \mid u \text{ vérifiant (3)} \left\| t^{\alpha_0} u \right\|_{L^{p_0}(A_0)}^{1-\theta} \left\| t^{\alpha_1} \frac{du}{dt} \right\|_{L^{p_1}(A_1)}^{\theta} \right\} \end{aligned}$$

où θ est défini par

$$(4) \quad \Theta = \frac{\alpha_0 + \frac{1}{p_0}}{\alpha_0 + \frac{1}{p_0} + 1 - \alpha_1 - \frac{1}{p_1}}$$

Proposition 1 : $T(\alpha_0, p_0, \alpha_1, p_1, A_0, A_1) = (A_0, A_1)_{\Theta, p}$ algébriquement et topologiquement où Θ est donné par (4) et p par

$$(5) \quad \frac{1}{p} = \frac{1 - \Theta}{p_0} + \frac{\Theta}{p_1}$$

Proposition 2 : Soit T une application (linéaire ou non) de $A_0 + A_1$ dans $B_0 + B_1$ vérifiant

$$(6) \quad Ta \in B_0 \text{ si } a \in A_0 \text{ et } \|Ta\|_{B_0} \leq c \|a\|_{A_0}$$

$$(7) \quad Ta - Tb \in B_1 \text{ si } a - b \in A_1 \text{ et } \|Ta - Tb\|_{B_1} \leq c \|a - b\|_{A_1}$$

alors on a

$$(8) \quad Ta \in (B_0, B_1)_{\Theta, p} \text{ si } a \in (A_0, A_1)_{\Theta, p} \text{ et } \|Ta\|_{(B_0, B_1)_{\Theta, p}} \leq c \|a\|_{(A_0, A_1)_{\Theta, p}}.$$

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$.

On note $L^p(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions de puissance $p^{\text{ème}}$ sommable pour la mesure de Lebesgue dx . Les espaces $(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))$ $1 - \frac{1}{p}, q$
 $L^{p, q}(\Omega)$ sont les espaces de Lorentz. $L^{p, p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

On note $W^{1, p}(\Omega)$ l'espace des fonctions $u \in L^p : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p \text{ } i = 1 \dots n$.
 muni de la norme $\|u\|_{W^{1, p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p}^p)^{1/p}$ espace de Sobolev.

On note $W_q^{s, p}$ l'espace $(W^{1, p}(\Omega), L^p(\Omega))_{1-s, q}$ espace de Besov.

On considérera aussi les espaces $(W^{1, p_0}, L^{p_1})_{\Theta, p}$ qui ne coïncide pas toujours avec un espace de Besov si $p_0 \neq p_1$.

On aura besoin de considérer des applications du type $u \rightarrow f \circ u$ où f est une fonction lipschitzienne sur R .

Proposition 3 : Si f est lipschitzienne sur R . Si u et v sont des fonctions mesurables sur Ω avec $u - v \in L^{p,q}(\Omega)$ alors

$$\|f \circ u - f \circ v\|_{L^{p,q}(\Omega)} \leq \|f\|_{\text{Lip}} \|u - v\|_{L^{p,q}}.$$

Démonstration immédiate puisque $|f \circ u(x) - f \circ v(x)| < \|f\|_{\text{Lip}} |u(x) - v(x)|$ pp sur Ω . Il est intéressant de noter qu'on peut remplacer par un espace de fonctions mesurables X vérifiant $\varphi \in X$ et $|\psi| \leq |\varphi| \Rightarrow \psi \in X$ et $\|\psi\|_X \leq \|\varphi\|_X$.

Proposition 4 : Si f est lipschitzienne sur R et $f(0) = 0$. Alors si $u \in W_q^{s,p}(\Omega)$ on a $\|f \circ u\|_{W_q^{s,p}} \leq \|f\|_{\text{Lip}} \|u\|_{W_q^{s,p}}$.

Démonstration : D'après la proposition 2 et la proposition 3 appliquées à $L^p(\Omega)$ il suffit de montrer l'inégalité pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

$$\text{Mais } \frac{\partial}{\partial x_i} f \circ u = f' \circ u \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ et donc } \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (f \circ u) \right|_{L^p} \leq \|f'\|_L \left| \frac{u}{x_i} \right|_{L^p}$$

comme $f(0) = 0$ on a aussi $|f \circ u| < \|f\|_{\text{Lip}} |u|$ d'où le résultat.

Il est intéressant de noter qu'on peut remplacer $W_q^{s,p}$ par les espaces $(W^{1,p_0}, L^{p_1})_{\theta,p}$ ou par des espaces Y plus généraux. En particulier si Y vérifie la proposition 4 et si X vérifie la proposition 3 alors les espaces $(Y, X)_{\theta,p}$ vérifient la proposition 4.

Par exemple on pourra considérer des fonctions dont certaines dérivées seulement sont dans des espaces L^p .

I - ENSEMBLES "INTERMÉDIAIRES"

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$.

Soit X_1 un espace de fonctions mesurables sur Ω muni d'une structure d'espace de Banach vérifiant

$$(1) \quad \varphi \in X_1 \text{ et } |\psi| \leq |\varphi| \text{ implique } \psi \in X_1 \text{ et } \|\psi\|_{X_1} \leq c\|\varphi\|_{X_1}$$

Soit Y un espace de fonctions mesurables sur Ω muni d'une structure d'espace de Banach vérifiant :

$$(2) \quad \left| \begin{array}{l} \text{si } f \text{ est une fonction lipschitzienne de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ vérifiant} \\ f(0) = 0 \text{ alors } \varphi \in Y \Rightarrow f \circ \varphi \in Y \text{ et } \|f \circ \varphi\|_Y \leq c\|f\|_{\text{Lip}}\|\varphi\|_Y \\ \text{si } G \text{ est une fonction lipschitzienne sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ vérifiant } G(0,0)=0 \\ \text{alors } \varphi, \psi \in Y \Rightarrow \|G(\varphi, \psi)\|_Y \leq c\|\varphi\|_Y + c\|\psi\|_Y \end{array} \right.$$

Soit

$$(3) \quad \lambda > -1 \text{ et } X_0 = \{u \mid |u|^\lambda u \in Y\}$$

On se propose de fabriquer des ensembles "intermédiaires" entre X_0 et X_1 et on s'intéressera ensuite à la question suivante "Peut-on obtenir des espaces du type $|u|^\mu u \in (Y, X_1)_{\theta, p}$?".

Définition 1 : Soient $\alpha_0, \alpha_1, p_0 > 0, p_1 > 1$ vérifiant $0 < \alpha_0 + \frac{1}{p_0}$ et $\alpha_1 + \frac{1}{p_1} < 1$ on pose

$$(4) \quad \left| \begin{array}{l} T(\alpha_0, p_0, \alpha_1, p_1; X_0, X_1) = u(0) : \text{traces des fonctions } u \text{ vérifiant} \\ \begin{array}{l} t^{\alpha_0} |u|^\lambda u \in L^{p_0}(0, \infty; Y) \\ t^{\alpha_1} \frac{\partial u}{\partial t} \in L^{p_1}(0, \infty; X_1) \end{array} \end{array} \right. \quad (1)$$

(1) Au sens suivant : il existe une fonction $\varphi \geq 0$ telle que $t^{\alpha_1} \varphi \in L^p(0, \infty)$ et telle que $\|u(s) - u(t)\|_{X_1} \leq \left| \int_s^t \varphi(\sigma) d\sigma \right|$ pp. $s, t > 0$.

Pour définir $u(0)$ on remarque que $u(1) - u(\frac{1}{n}) \in X_1$ et que c'est une suite de Cauchy dans X_1 qui converge vers $\xi \in X_1$ on pose alors $u(0) = u(1) - \xi$.

Définition 2 : Pour $u \in X_0 + X_1$ on pose

$$(5) \quad K(t, u) = \inf \{ \|u_0\|_Y^\lambda + t \|u_1\|_{X_1} \mid u = u_0 + u_1, u_0 \in X_0, u_1 \in X_1 \}$$

$$(6) \quad K(\theta, p; X_0, X_1) = \{ u \in X_0 + X_1 \mid t^{-\theta} K(t, u) \in L_*^p(0, \infty) \}$$

où $0 < \theta < 1$; $0 < p \leq +\infty$.

Définition 3 : Pour $u \in X_0 + X_1$; $0 < p_0, p_1 \leq +\infty$ on pose

$$(7) \quad L_{p_0, p_1}(t, u) = \inf \{ \|u_0\|_Y^{\lambda p_0} + t \|u_1\|_{X_1}^{p_1} \mid u = u_0 + u_1, u_0 \in X_0, u_1 \in X_1 \}$$

$$(8) \quad L(p_0, p_1, \theta, p; X_0, X_1) = \{ u \in X_0 + X_1 \mid t^{-\theta} L_{p_0, p_1}(t, u) \in L_*^p(0, \infty) \}$$

où $0 < \theta < 1$; $0 < p \leq +\infty$.

Pour des raisons techniques on substitue à $K(t, u)$ et $L_{p_0, p_1}(t, u)$ les quantités équivalentes suivantes :

$$(9) \quad K^*(t, u) = \inf_{u=u_0+u_1} \max (\|u_0\|_Y^\lambda ; t \|u_1\|_{X_1})$$

$$(10) \quad L_{p_0, p_1}^*(t, u) = \inf_{u=u_0+u_1} \max (\|u_0\|_Y^{\lambda p_0} ; t \|u_1\|_{X_1}^{p_1})$$

$$\text{On a} \quad K^*(t, u) \leq K(t, u) \leq 2 K^*(t, u)$$

$$L_{p_0, p_1}^*(t, u) \leq L_{p_0, p_1}(t, u) \leq 2 L_{p_0, p_1}^*(t, u).$$

On va maintenant montrer que les définitions 1, 2 et 3 conduisent aux mêmes ensembles. La méthode suit celle employée dans le cas de l'interpolation linéaire. Peetre [4]

lemme 1 : Si $(11) \quad s = t^{\frac{p_1}{p_0-p_1}} (K^*(t, u))^{p_0-p_1}$ alors on a

$$(12) \quad L_{p_0, p_1}^*(s, u) = K^*(t, u)^{p_0}.$$

Démonstration : Soit $u \in X_0 + X_1$ et soit Γ l'adhérence dans $(\mathbb{R}_+)^2$ des points (x_0, x_1) tels qu'il existe une décomposition $u = u_0 + u_1$ avec $\|u_0\|_{Y_0}^{\lambda} \leq x_0$ et $\|u_1\|_{X_1} \leq x_1$.

Alors (9) et (10) équivalent à $K^*(t, u) = \inf_{(x_0, x_1) \in \Gamma} \text{Max}(x_0, tx_1)$

et $L_{p_0, p_1}^*(s, u) = \inf_{(x_0, x_1) \in \Gamma} \text{Max}(x_0^{p_0}, s x_1^{p_1})$

Comme $\Gamma \cap \{(x_0 \leq c) \times (x_1 \leq c)\}$ est compact les Inf sont atteints.

Si $\text{Max}(x_0, tx_1) = K^*(t, u)$ on peut remplacer x_0 par $K^*(t, u)$ et x_1 par $\frac{K^*(t, u)}{t}$, puisque cela donne un Max égal, et donc on peut supposer $x_0 = tx_1 = K^*(t, u)$.

De même il existe y_0, y_1 tels que $y_0^{p_0} = s y_1^{p_1} = L_{p_0, p_1}^*(s, u)$

A cause de (11) on a $\frac{y_0^{p_0}}{y_1^{p_1}} = s = t^{p_1} K^*(t, u)^{p_0 - p_1} = \frac{x_0^{p_0}}{x_1^{p_1}}$

Donc $\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{p_0} = \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^{p_1} = \lambda$.

On ne peut avoir $\lambda > 1$ car (x_0, x_1) donnerait un meilleur résultat que (y_0, y_1) dans le calcul de $L_{p_0, p_1}^*(s, u)$. De même $\lambda < 1$ est impossible. On a donc nécessairement $x_0 = y_0$ et $x_1 = y_1$ et donc

$$L_{p_0, p_1}^*(s, u) = y_0^{p_0} = x_0^{p_0} = K^*(t, u)^{p_0}$$

THEOREME 1 :

Si $0 < \theta < 1$; $0 < p_0, p_1 < +\infty$, $0 < p \leq +\infty$ on a

$$(13) \quad L(p_0, p_1; \theta, p; X_0, X_1) = K(\tilde{\theta}, \tilde{p}; X_0, X_1) \text{ avec}$$

$$(14) \quad \frac{1-\tilde{\theta}}{\tilde{\theta}} = \frac{1-\theta}{\theta} \frac{p_0}{p_1}$$

$$(15) \quad \tilde{p} = ((1-\theta)p_0 + \theta p_1) p.$$

Démonstration : On suppose $p < +\infty$, le cas $p = +\infty$ étant immédiat.

$$\text{On a} \quad 0 \leq \frac{d}{dt} K^*(t, u) \leq \frac{1}{t} K^*(t, u).$$

En effet si $u = u_0 + u_1$ avec $\text{Max} (\|u_0\|_{Y_0}^\lambda, t\|u_1\|_{X_1}) \leq (1+\varepsilon)K^*(t, u)$ on a $K^*(t, u) \leq \text{Max} (\|u_0\|_{Y_0}^\lambda; (t+h)\|u_1\|_{X_1}) \leq (1+\varepsilon) \frac{t+h}{t} K^*(t, u).$

Donc $0 \leq K^*(t+h, u) - K^*(t, u) \leq \frac{h}{t} K^*(t, u)$ si on fait $\varepsilon \rightarrow 0$. Puis l'inégalité voulue quand $h \rightarrow 0$.

On différencie (11) et on obtient

$$\frac{ds}{s} = (p_1 + (p_0 - p_1) \frac{t}{K^*(t, u)}) \frac{d}{dt} K^*(t, u) \frac{dt}{t}$$

mais alors l'inégalité précédente montre que

$$(p_1 + (p_0 - p_1) \frac{t}{K^*(t, u)}) \frac{d}{dt} K^*(t, u) \in [p_0, p_1]$$

On considère alors $\int_0^\infty (s^{-\theta} L^*_{p_0, p_1}(s, u))^p \frac{ds}{s}$ dans laquelle on fait le changement de variable (11). On obtient en utilisant (12)

$$\int_0^\infty \left[t^{-\theta p_1} K^*(t, u)^{-\theta(p_0 - p_1)} \cdot K^*(t, u)^{p_0} \right]^p \{ \dots \} \frac{dt}{t}$$

ce qui est équivalent d'après les valeurs de $\tilde{\theta}$ et $\tilde{p}$ de (14) (15) à

$$\int_0^\infty t^{-\tilde{\theta} \tilde{p}} K^*(t, u)^{\tilde{p}} \frac{dt}{t}.$$

THEOREME 2 : Si $p_0 > 0$, $p_1 \geq 1$, $\alpha_0 + \frac{1}{p_0} > 0$, $1 - \alpha_1 - \frac{1}{p_1} > 0$ alors

$$(16) \quad T(\alpha_0, p_0, \alpha_1, p_1; X_0, X_1) = L(p_0, p_1, \theta, 1; X_0, X_1) \quad \text{où}$$

$$(17) \quad \frac{1-\theta}{\theta} = \frac{(1-\alpha_1 - \frac{1}{p_1})p_1}{(\alpha_0 + \frac{1}{p_0})p_0}$$

donc

$$(16)\text{bis} \quad T(\alpha_0, p_0, \alpha_1, p_1, X_0, X_1) = K(\tilde{\theta}, \tilde{p}, X_0, X_1) \quad \text{où}$$

$$(17)\text{bis} \quad \tilde{\theta} = \frac{\alpha_0 + \frac{1}{p_0}}{\alpha_0 + \frac{1}{p_0} + 1 - \alpha_1 - \frac{1}{p_1}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tilde{p}} = \frac{1-\tilde{\theta}}{p_0} + \frac{\tilde{\theta}}{p_1}$$

Démonstration

1ère étape : $a \in T(\dots) \Rightarrow a \in L(\dots)$

Soit $a = u(0)$ avec u vérifiant (3)

Posons $u_0(t) = u(t)$. On a donc $\int_0^\infty t^{\alpha_0 p_0} \| |u_0(t)|^\lambda u_0(t) \|_Y^{p_0} dt < +\infty$

Posons $u_1(t) = a - u_0(t) = - \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(\sigma) d\sigma$

Comme $p_1 \geq 1$ et $1 - \alpha_1 - \frac{1}{p_1} > 0$ on peut appliquer l'inégalité de Hardy.

$$\left\| t^{\alpha_1} \frac{u_1(t)}{t} \right\|_{L^{p_1}(0, \infty; X_1)} \leq \frac{1}{1 - \alpha_1 - \frac{1}{p_1}} \left\| t^{\alpha_1} \frac{du}{dt} \right\|_{L^{p_1}(0, \infty; X_1)}$$

On a donc $\int_0^\infty t^{(\alpha_1 - 1)p_1} \|u_1(t)\|_{X_1}^{p_1} dt < +\infty$.

• Si on pose $\mu = - \frac{(\alpha_0 + \frac{1}{p_0})p_0}{\theta}$ on a grâce à la définition de θ

$$(\alpha_0 + \frac{1}{p_0})p_0 = -\mu\theta \quad \text{et} \quad (\alpha_1 + \frac{1}{p_1} - 1)p_1 = \mu(1-\theta)$$

On fait alors le changement de variable $t = s^{1/\mu}$.

On pose $\bar{u}_0(s) = u_0(s^{1/\mu})$ $\bar{u}_1(s) = u_1(s^{1/\mu})$ et on obtient

$$\int_0^\infty s^{-\theta} \|\bar{u}_0(s)\|_Y^{\lambda} \bar{u}_0(s)^{p_0} \frac{ds}{s} < +\infty$$

et
$$\int_0^\infty s^{1-\theta} \|\bar{u}_1(s)\|_{X_1}^{p_1} \frac{ds}{s} < +\infty$$

Comme $L_{p_0, p_1}(s, a) \leq \|\bar{u}_0(s)\|_Y^{\lambda} \bar{u}_0(s)^{p_0} + s \|\bar{u}_1(s)\|_{X_1}^{p_1}$

on a $s^{-\theta} L_{p_0, p_1}(s, a) \in L_*^1(0, \infty)$ ce qui achève la première étape.

2ème étape $a \in L(\dots) \Rightarrow a \in T(\dots)$

I) $a \in L(\dots) \Rightarrow a_+ \text{ et } a_- \in L(\dots)$ (1)

Soit $a = u_0 + u_1$ avec $\|u_0\|_Y^{\lambda} u_0^{p_0} + t \|u_1\|_{X_1}^{p_1} \leq 2 L_{p_0, p_1}(t, a)$

On écrit $a_+ = u_{0+} + (a_+ - u_{0+}) = v_0 + v_1$.

On a $v_0 \in X_0$: en effet $|v_0|^{\lambda} v_0 = (|u_0|^{\lambda} u_0)_+$. L'application $s \mapsto s_+$ est une application lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'annulant en 0. Alors d'après l'hypothèse (2) sur l'espace Y on a $\|v_0\|_Y^{\lambda} v_0 \leq c \|u_0\|_Y^{\lambda} u_0$.

On a $v_1 \in X_1$: en effet on a pour presque tout x de Ω

$$|v_1(x)| = |a_+(x) - u_{0+}(x)| \leq |a(x) - u_0(x)| = |u_1(x)| \text{ et donc d'après}$$

l'hypothèse (1) sur l'espace X_1 on a $\|v_1\|_{X_1} \leq c \|u_1\|_{X_1}$.

Par conséquent on a $L_{p_0, p_1}(t, a_+) \leq c L_{p_0, p_1}(t, a)$

Le même raisonnement est valable pour a_-

II) Si $a \in T(\alpha_0, p_0, \alpha_1, p_1, X_0, X_1)$ et $a \geq 0$ alors il existe une fonction $u(t)$ vérifiant

(1) $a_+ = \sup(a, 0)$; $a_- = \sup(-a, 0)$; $a = a_+ - a_-$

$$(4) \quad \left| \begin{array}{l} t^{\alpha_0} |u(t)|^\lambda u(t) \in L^{p_0}(0, \infty; Y) \quad u(0) = a \text{ et } u(t) \geq 0 \quad \forall t > 0 \\ t^{\alpha_1} \frac{du}{dt}(t) \in L^{p_1}(0, \infty; X_1) \end{array} \right.$$

En effet si $a = \bar{u}(0)$ avec $\left| \begin{array}{l} t^{\alpha_0} |\bar{u}(t)|^\lambda \bar{u}(t) \in L^{p_0}(0, \infty; Y) \\ t^{\alpha_1} \frac{d\bar{u}(t)}{dt} \in L^{p_1}(0, \infty; X_1) \end{array} \right.$

il suffit de choisir $u(t) = \bar{u}(t)_+$.

Comme dans I) on a $\| |u(t)|^\lambda u(t) \|_Y < c \| |\bar{u}(t)|^\lambda \bar{u}(t) \|_Y$.

On a $\| u(t+h) - u(t) \|_{X_1} \leq c \| \bar{u}(t+h) - \bar{u}(t) \|_{X_1}$

et donc $\| \frac{du}{dt} \|_{X_1} \leq c \| \frac{d\bar{u}}{dt} \|_{X_1}$

III) Soit a tel que a_+ et $a_- \in T(\dots)$ alors $a \in T(\dots)$

Soit $a_+ = u(0)$ avec u vérifiant (4) et $u \geq 0$ d'après II)

$a_- = v(0)$ avec v vérifiant (4) et $v \geq 0$ d'après II)

On pose $w(t) = F(u(t), v(t))$ où F est une fonction de deux variables x et y définie dans le quadrant $x \geq 0, y \geq 0$ par

$$(18) \quad \left| \begin{array}{l} F(x, y) = (x^{\lambda+1} + y^{\lambda+1})^{\frac{1}{\lambda+1}} \quad \text{si } 0 \leq y \leq \frac{x}{2} \\ -(x^{\lambda+1} + y^{\lambda+1})^{\frac{1}{\lambda+1}} \quad \text{si } 0 \leq x \leq \frac{y}{2} \\ \text{linéaire en } x \text{ et } y \quad \text{si } 0 \leq \frac{x}{2} \leq y \leq 2x. \end{array} \right.$$

Soit G la fonction définie par

$$(19) \quad \left| F(x, y) \right|^\lambda F(x, y) = G(x^{\lambda+1}, y^{\lambda+1})$$

On peut alors vérifier que F et G possèdent les propriétés suivantes

$$(20) \quad \left| \begin{array}{l} F(x,0) = x \quad ; \quad F(0,y) = -y \\ \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \right| \leq c \\ \left| \frac{|F(x,y)|^\lambda}{x^\lambda} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \right| + \left| \frac{|F(x,y)|^\lambda}{y^\lambda} \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \right| \leq c \end{array} \right.$$

$$(21) \quad \left| \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) \right| + \left| \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) \right| \leq c$$

D'après (19) on a $|w(t)|^\lambda w(t) = G(|u(t)|^\lambda u(t), |v(t)|^\lambda v(t))$

Alors d'après l'inégalité (21) et l'hypothèse (2) sur l'espace Y on a

$$\| |w(t)|^\lambda w(t) \|_Y \leq c \| |u(t)|^\lambda u(t) \|_Y + c \| |v(t)|^\lambda v(t) \|_Y$$

et donc $t^{\alpha_0} |w(t)|^\lambda w(t) \in L^{p_0}(0, \infty; Y)$.

D'autre part F étant lipschitzienne on a

$$\|w(t+h) - w(t)\|_{X_1} \leq c \|u(t+h) - u(t)\|_{X_1} + c \|v(t+h) - v(t)\|_{X_1}$$

et donc $\left\| \frac{dw}{dt} \right\|_{X_1} \leq c \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{X_1} + c \left\| \frac{dv}{dt} \right\|_{X_1}$ et donc $t^{\alpha_1} \frac{dw}{dt} \in L^{p_1}(0, \infty; X_1)$

Comme $w(0) = F(u(0), v(0)) = F(a_+, a_-) = a$ on a bien $a \in T(\dots)$

IV) Compte tenu des points I) II) III) il suffit de considérer le cas $a \in L(\dots)$, $a \geq 0$.

Soit $a = u_0(t) + u_1(t)$ avec $\| |u_0(t)|^\lambda u_0(t) \|_Y^{p_0} + t \| u_1(t) \|_{X_1}^{p_1} \leq 2L_{p_0, p_1}(t, a)$

D'après ce qu'on a vu ci-dessus, en remplaçant u_0 par u_{0+} on change la constante 2. On supposera donc $u_0(t) \geq 0$. On supprime les indices p_0, p_1 pour simplifier.

Comme $0 \leq \frac{d}{dt} L(t, a) \leq \frac{L(t, a)}{t}$ (comme au théorème 1) on a

$$L(e^{k+1}, a) \leq e L(e^k, a) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Posons

$$(22) \quad \begin{cases} u_{0,k} = u_0(e^k) \geq 0 & k \in \mathbb{Z} \\ u_{1,k} = a - u_{0,k} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Comme } \int_{e^k}^{e^{k+1}} t^{-\theta} L(t, a) \frac{dt}{t} &\geq L(e^k, a) e^{-(k+1)\theta} \int_{e^k}^{e^{k+1}} \frac{dt}{t} \\ &= L(e^k, a) e^{-(k+1)\theta} \geq c e^{-k\theta} \|u_{0,k}\|_Y^{\lambda} \|u_{0,k}\|_Y^{p_0} \end{aligned}$$

$$(23) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-k\theta} \|u_{0,k}\|_Y^{\lambda+1} \|u_{0,k}\|_Y^{p_0} < +\infty.$$

$$\text{On a } \|u_{1,k+1} - u_{1,k}\|_{X_1}^{p_1} \leq c \|u_{1,k+1}\|_{X_1}^{p_1} + c \|u_{1,k}\|_{X_1}^{p_1} \leq c e^{-k} L(e^k, a)$$

et donc

$$(24) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{k(1-\theta)} \|u_{1,k+1} - u_{1,k}\|_{X_1}^{p_1} < +\infty$$

$$\text{Mais comme } u_{1,k+1} - u_{1,k} = -(u_{0,k+1} - u_{0,k}) \quad \text{on a}$$

$$(24)\text{bis} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{k(1-\theta)} \|u_{0,k+1} - u_{0,k}\|_{X_1}^{p_1} < +\infty$$

$$t^{-\theta} L(t, a) \in L_*^1 \Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-k\theta} L(e^k, a) < +\infty$$

$$\text{et donc } \lim_{k \rightarrow +\infty} e^{-k} L(e^k, a) = 0 \quad \text{c'est-à-dire } \|u_{1,k}\|_{X_1} \rightarrow 0 \quad \text{quand } k \rightarrow \infty.$$

Il faut maintenant relier $u_{0,k}$ à $u_{0,k+1}$ par une courbe $u(t)$ ayant des propriétés particulières. Pour cela nous aurons recours au lemme suivant.

Lemme 2 : Soit $\varphi, \psi \geq 0$ appartenant à X_0 avec $\varphi - \psi \in X_1$. Il existe une fonction $\Phi(t, \varphi, \psi)$ définie pour $t \in [0, 1]$ telle que

$$(25) \quad \begin{cases} \Phi(0, \varphi, \psi) = \varphi ; & \Phi(1, \varphi, \psi) = \psi \\ \Phi(t, \varphi, \psi) \geq 0 & \text{pour } t \in [0, 1] \\ \|\Phi(t, \varphi, \psi)\|_Y^{\lambda+1} \leq c \|\varphi\|_Y^{\lambda+1} + c \|\psi\|_Y^{\lambda+1} \\ \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \varphi, \psi) \right\|_{X_1} \leq c \|\varphi - \psi\|_{X_1} \end{cases}$$

Démonstration : Soit f une fonction régulière définie sur $[0,1]$ croissante telle que

$$\begin{aligned} f(t) &= t^{\lambda+1} \quad \text{dans un voisinage de } 0 \\ f(t) &= 1 - (1-t)^{\lambda+1} \quad \text{dans un voisinage de } 1. \end{aligned}$$

Alors on aura

$$f'(t) \leq c (f(t))^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}$$

et

$$f'(t) \leq c (1 - f(t))^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}$$

On pose alors

$$\Phi(t, \varphi, \psi)^{\lambda+1} = (1 - f(t))\varphi^{\lambda+1} + f(t)\psi^{\lambda+1}$$

Les premières lignes de (25) sont évidentes. Seule est à démontrer la dernière :

$$\text{On a} \quad \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \varphi, \psi) = \frac{1}{\lambda+1} \frac{f'(t) (\psi^{\lambda+1} - \varphi^{\lambda+1})}{\frac{\lambda}{\Phi(t, \varphi, \psi)^{\lambda+1}}}$$

$$\text{et donc} \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \varphi, \psi) \right| \leq c |\varphi - \psi| \frac{f'(t) (\psi^\lambda + \varphi^\lambda)}{(1-f(t))^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} \varphi^\lambda + f(t)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} \psi^\lambda} \quad \text{presque partout sur } \Omega$$

$$\leq c |\varphi - \psi| \quad \text{presque partout sur } \Omega$$

$$\text{et donc d'après l'hypothèse (1)} \quad \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \varphi, \psi) \right\|_{X_1} \leq c \|\varphi - \psi\|_{X_1} \quad \square$$

Pour $t \in [e^k, e^{k+1}]$ on pose

$$(26) \quad u(t) = \Phi(\text{Log } t - k, u_{0,k}, u_{0,k+1}).$$

Donc $u(e^k) = u_{0,k}$ et donc $\lim_{t \rightarrow \infty} a - u(t) = 0$ dans X_1 puisque $a - u(e^k) = u_{1,k} \rightarrow 0$ dans X_1 quand $k \rightarrow \infty$.

D'après (25) on a $\| |u(t)|^\lambda u(t) \|_Y^{p_0} \leq c \|u_{0,k}\|^{\lambda+1}_{p_0} + c \|u_{0,k+1}\|^{\lambda+1}_{p_0}$ si $t \in [e^k, e^{k+1}]$ et donc d'après (23) on a

$$(27) \quad \int_0^{\infty} t^{-\theta} \| |u(t)|^\lambda u(t) \|_Y^{p_0} \frac{dt}{t} < +\infty$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\text{Log } t - k, u_{0,k}, u_{1,k}) \quad \text{et donc d'après (25)}$$

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{X_1} \leq \frac{c}{t} \|u_{0,k} - u_{0,k+1}\|_{X_1} \quad \text{ce qui entraîne d'après (24)bis}$$

$$(28) \quad \int_0^{\infty} t^{p_1+1-\theta} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{X_1}^{p_1} \frac{dt}{t} < +\infty$$

$$\text{On a donc} \quad \left\{ \begin{array}{l} t^{-\frac{\theta}{p_0} - \frac{1}{p_0}} |u(t)|^\lambda u(t) \in L^{p_0}(0, \infty; Y) \\ t^{1 - \frac{\theta}{p_1}} \frac{du}{dt}(t) \in L^{p_1}(0, \infty; X_1) \\ u(\infty) = a \end{array} \right.$$

$$\text{On définit alors } \mu \text{ par } \mu(\alpha_0 + \frac{1}{p_0}) = -\frac{\theta}{p_0} \quad (\text{et donc } \mu < 0)$$

$$\text{d'après la définition de } \theta \text{ on a } \mu(\alpha_1 + \frac{1}{p_1} - 1) = \frac{1-\theta}{p_1}.$$

$$\text{On pose alors } \bar{u}(s) = u(s^{1/\mu}) \quad \text{et on a}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s^{\alpha_0} |\bar{u}(s)|^\lambda \bar{u}(s) \in L^{p_0}(0, \infty; Y) \\ s^{\alpha_1} \frac{d\bar{u}}{ds}(s) \in L^{p_1}(0, \infty; X_1) \\ \bar{u}(0) = a \end{array} \right. \quad \blacksquare$$

THEOREME 3 : Si $0 < \theta < 1$ et $0 < p < q \leq +\infty$ on a

$$(29) \quad K(\theta, p; X_0, X_1) \subset K(\theta, q; X_0, X_1)$$

Démonstration : Soit $a \in K(\theta, p; X_0, X_1)$ donc $t^{-\theta} K(t, u) \in L_*^p(0, \infty)$

Comme K est croissante on a

$$K(s, u)^p \int_s^\infty t^{-\theta p} \frac{dt}{t} < \int_s^\infty (t^{-\theta} K(t, u))^p \frac{dt}{t} \leq c$$

et donc $s^{-\theta p} K(s,u)^p < c \theta^p$ c'est-à-dire $t^{-\theta} K(t,u) \in L_{*}^{\infty}(0,\infty)$

Par conséquent $t^{-\theta} K(t,u) \in L_{*}^p(0,\infty) \cap L_{*}^{\infty}(0,\infty) \subset L_{*}^q(0,\infty)$ ■

II - PROPRIETES D'INTERPOLATION.

Avec les théorèmes d'équivalence du paragraphe I on peut étudier les propriétés d'interpolation des ensembles intermédiaires.

Soit $\lambda > -1$; X_1 , Y vérifiant les hypothèses (1) et (2) du paragraphe précédent et $X_0 = \{u \mid |u|^\lambda u \in Y\}$.

Soit $\tilde{\lambda} > -1$, $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ un autre couple et $\tilde{X}_0 = \{v \mid |v|^{\tilde{\lambda}} v \in \tilde{Y}\}$.

Soit T une application de $X_0 + X_1$ dans $\tilde{X}_0 + \tilde{X}_1$ vérifiant

$$(1) \quad a \in X_0 \Rightarrow Ta \in \tilde{X}_0 \quad \text{et} \quad \| |Ta|^{\tilde{\lambda}} Ta \|_{\tilde{Y}} \leq c \| |a|^\lambda a \|_Y^\beta \quad \forall a \in X_0 \quad (\beta > 0)$$

$$(2) \quad \left| \begin{array}{l} a, b \in X_0 + X_1, \quad a-b \in X_1 \Rightarrow Ta - Tb \in \tilde{X}_1 \quad \text{et} \\ \|Ta - Tb\|_{\tilde{X}_1}^\alpha \leq c \|a-b\|_{X_1}^\alpha \end{array} \right. \quad 0 < \alpha \leq 1 .$$

THEOREME 1 : Sous les hypothèses (1) (2) ci-dessus T envoie $K(\theta, p, X_0, X_1)$ dans $K(\tilde{\theta}, \tilde{p}, \tilde{X}_0, \tilde{X}_1)$ avec (3) $\frac{1-\tilde{\theta}}{\tilde{\theta}} = \frac{1-\theta}{\theta} \frac{\alpha}{\beta}$ et

$$(4) \quad \frac{1}{\tilde{p}} = \frac{(1-\tilde{\theta})\beta + \tilde{\theta} \alpha}{p} .$$

Démonstration : Soit $a \in K(\theta, p, X_0, X_1)$ et $a = u_0(t) + u_1(t)$ avec

$$\| |u_0(t)|^\lambda u_0(t) \|_{Y_0} + t \|u_1(t)\|_{X_1} \leq 2 K(t, a) .$$

Alors $Ta = T u_0(t) + (Ta - T u_0(t)) = b_0(t) + b_1(t)$.

$$\text{on a } \| |b_0(t)|^{\tilde{\lambda}} b_0(t) \|_{\tilde{Y}} \leq c \| |u_0(t)|^\lambda u_0(t) \|_Y^\beta$$

$$\text{comme } a - u_0(t) \in X_1 \quad \text{on a} \quad \|Ta - Tu_0(t)\|_{\tilde{X}_1} = \|b_1(t)\|_{\tilde{X}_1} \leq c \|a - u_0(t)\|_{X_1}^\alpha$$

c'est-à-dire $\|b_1(t)\|_{\tilde{X}_1} \leq c \|u_1(t)\|_{X_1}^\alpha$

Donc $\|b_0(t)\|_{\tilde{Y}}^{\tilde{\lambda}} \|b_0(t)\|_{\tilde{Y}}^{1/\beta} + t \|b_1(t)\|_{\tilde{X}_1}^{1/\alpha} \leq c K(t, a)$.

C'est-à-dire $L_{1/\beta, 1/\alpha}(t, Ta) \leq c K(t, a)$

par conséquent $Ta \in L(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}, \theta, p, \tilde{X}_0, \tilde{X}_1) = K(\tilde{\theta}, \tilde{p}, \tilde{X}_0, \tilde{X}_1)$

d'après le théorème 1 (13) du paragraphe précédent. ■

Dans (1) et (2) les constantes ne dépendent pas de a et b . Pour obtenir la généralisation aux cas des majorations locales on supposera alors $X_0 \subset X_1$.

Soit $\lambda > -1$, X_1 , Y vérifiant les hypothèses (1) et (2) du paragraphe précédent on suppose que $X_0 = \{u \mid |u|^\lambda u \in Y\} \subset X_1$.

De même $\tilde{\lambda} > -1$, $\tilde{X}_1$, $\tilde{Y}$ et $\tilde{X}_0 = \{v \mid |v|^{\tilde{\lambda}} v \in \tilde{Y}\} \subset \tilde{X}_1$.

Soit T une application de X_1 dans $\tilde{X}_1$ vérifiant

$$(5) \quad \|Ta - Tb\|_{\tilde{X}_1} \leq c(\|a\|_{X_1}, \|b\|_{Y_1}) \|a - b\|_{X_1}^\alpha$$

$$(6) \quad \left| \begin{array}{l} \text{si } a \in X_0 \text{ on a } Ta \in \tilde{X}_0 \text{ avec} \\ \|Ta\|_{\tilde{Y}}^{\tilde{\lambda}} \|Ta\|_{\tilde{Y}} \leq c(\|a\|_{X_1}) \|a\|_{X_1}^\beta \end{array} \right.$$

THEOREME 2 : Sous les hypothèses (5), (6) on a la même conclusion qu'au théorème 1.

Démonstration Soit $a = u_0(t) + u_1(t)$ avec

$$\|u_0(t)\|_{\tilde{Y}}^{\tilde{\lambda}} \|u_0(t)\|_{\tilde{Y}} + t \|u_1(t)\|_{X_1} \leq 2 K(t, a) \text{ comme } K(t, a) \leq t \|a\|_{X_1} \text{ on a}$$

$$\|u_1(t)\|_{X_1} \leq 2 \|a\|_{X_1} \text{ et donc } \|u_0(t)\|_{X_1} \leq 3 \|a\|_{X_1}.$$

Alors $Ta = Tu_0(t) + Ta - Tu_0(t)$

$$\|Tu_0(t)\|_{\tilde{X}_1}^{\tilde{\lambda}} \|Tu_0(t)\|_{\tilde{X}_1} \leq c(3\|a\|_{X_1}) \|u_0(t)\|_{\tilde{Y}}^{\tilde{\lambda}} \|u_0(t)\|_{\tilde{Y}}^\beta$$

$$\text{et } \|Ta - Tu_0(t)\|_{X_1} \leq c(\|a\|_{X_1}, 2\|a\|_{X_1}) \|a - u_0(t)\|_{X_1}^\alpha$$

et donc $Ta \in L(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}, \theta, p, \tilde{X}_0, \tilde{X}_1)$ ■

III - CARACTERISATION DE CERTAINS ENSEMBLES INTERMEDIAIRES

On va montrer que pour certains espaces Y , X_1 et certaines valeurs des paramètres θ , p on peut caractériser l'ensemble $K(\theta, p, X_0, X_1)$.

Y sera un espace du "type $W^{1, p_0}(\Omega)$ ". On montrera le théorème ci-dessous en prenant $Y = W_{p_0}^{s_0, p_0}(\Omega)$ $0 \leq s_0 \leq 1$, mais la démonstration montrera que le même résultat est vrai si on considère des fonctions ayant des dérivées d'ordres différents (mais ≤ 1) suivant les directions.

X_1 sera $L^{p_1}(\Omega)$ mais on pourrait prendre un poids.

Soit donc

$$(1) \quad X_0 = \{u \mid |u|^\lambda u \in W_{p_0}^{s_0, p_0}(\Omega) \mid \lambda > -1, 0 \leq s_0 \leq 1, 1 \leq p_0 \leq +\infty\}$$

$$(2) \quad X_1 = L^{p_1}(\Omega) \quad 1 \leq p_1 \leq +\infty.$$

THEOREME 1 : Soit X_0 et X_1 donnés par (1) (2). Soit θ, p_θ :

$0 < \theta < 1$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, alors on a

$$(3) \quad K(\theta, p_\theta, X_0, X_1) = \{u \mid |u|^{\lambda(1-\theta)} u \in (W_{p_0}^{s_0, p_0}(\Omega), L^{p_1}(\Omega))_{\theta, p_\theta}\}$$

Démonstration : D'après le théorème 2 du paragraphe I il faut caractériser les traces des fonctions u vérifiant

$$(4) \quad \left| \begin{array}{l} t^{\alpha_0} |u|^\lambda u \in L^{p_0}(0, \infty; W_{p_0}^{s_0, p_0}(\Omega)) \\ t^{\alpha_1} \frac{\partial u}{\partial t} \in L^{p_1}(0, \infty; L^{p_1}(\Omega)) \end{array} \right.$$

$$\text{où } \theta = \frac{\alpha_0 + \frac{1}{p_0}}{\alpha_0 + \frac{1}{p_0} + 1 - \alpha_1 - \frac{1}{p_1}}$$

Dans la suite on posera $X = (W_{p_0}^{s_0, p_0}(\Omega), L^{p_1}(\Omega))_{\theta, p_0}$

1ère étape : On va montrer que (4) entraîne $|u(0)|^{\lambda(1-\theta)} u(0) \in X$ et

$$(5) \quad \| |u(0)|^{\lambda(1-\theta)} u(0) \|_X \leq c \| t^{\alpha_0} |u|^\lambda \|_{L^{p_0}(Y)}^{1-\theta} \| t^{\alpha_1} \frac{\partial u}{\partial t} \|_{L^{p_1}(X_1)}^\theta$$

Comme dans le paragraphe I on se ramène à une fonction $u \geq 0$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$ on définit la fonction $h_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire par morceaux

$$(6) \quad \left| \begin{array}{l} h_k(2^k) = h_k(2^{k+3}) = h_k(\pm \infty) = 0 \\ h_k(2^{k+1}) = 2^{k+1} ; h_k(2^{k+2}) = 2^{k+2} \\ h_k \text{ linéaire par morceaux.} \end{array} \right.$$

On vérifie immédiatement

$$(7) \quad \left| \begin{array}{l} |h'_k(t)| \leq 2 \quad \forall t \geq 0 ; |h_k(t)| \leq \min(t, 2^{k+2}) \quad \forall t \geq 0 \\ t = \sup_{k \in \mathbb{Z}} h_k(t) \quad \forall t \geq 0 . \end{array} \right.$$

On pose alors (8) $v_k(x, t) = h_k^{\lambda(1-\theta)+1}(u(x, t)) \quad \forall x \in \Omega \quad \forall t \geq 0$

Lemme 1 : pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $t^{\alpha_0} v_k \in L^{p_0}(0, \infty; W_{p_0}^{s_0, p_0}(\Omega))$ et

$$(9) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\lambda\theta p_0} \| t^{\alpha_0} v_k \|_{L^{p_0}(Y)}^{p_0} \leq c \| t^{\alpha_0} |u|^\lambda \|_{L^{p_0}(Y)}^{p_0}$$

Démonstration : D'après (6) (7) et (8) on a

$$\bullet \quad |v_k(x,t)| \leq |u(x,t)|^{\lambda(1-\theta)+1} \quad \text{si } u(x,t) \in [2^k, 2^{k+3}]$$

$$\leq |u(x,t)|^{\lambda+1} 2^{-k\lambda\theta}$$

$$\text{donc } \|v_k(t)\|_{L^{p_0}}^{p_0} \leq 2^{-k\lambda\theta p_0} \int_{2^k \leq u(x,t) \leq 2^{k+3}} |u(x,t)|^{(\lambda+1)p_0} dx$$

ou donc

$$(10) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\lambda\theta p_0} \|v_k(t)\|_{L^{p_0}}^{p_0} \leq 3 \left\| |u(t)|^\lambda u(t) \right\|_{L^{p_0}}^{p_0} \quad \forall t \geq 0$$

$$\bullet \quad \text{Soit } \overline{v_k}(x,t) = h_k^{\lambda(1-\theta)+1} (\bar{u}(x,t)) \quad \text{avec } \bar{u}(x,t) \geq 0$$

$h_k^{\lambda(1-\theta)+1}$ est lipschitzien de norme $\leq (\lambda(1-\theta)+1) 2^{(k+2)\lambda(1-\theta)}$ et donc

$$|v_k(x,t) - \overline{v_k}(x,t)| \leq c 2^{k\lambda(1-\theta)} |u(x,t) - \bar{u}(x,t)| \quad \text{si } u(x,t) \text{ ou } \bar{u}(x,t) \in [2^k, 2^{k+1}]$$

$$\bar{u}(x,t) \in [2^k, 2^{k+1}]$$

$$\text{comme } |u(x,t) - \bar{u}(x,t)| \leq c \frac{|u(x,t)|^{\lambda+1} - \bar{u}(x,t)^{\lambda+1}}{|u(x,t)|^\lambda + |\bar{u}(x,t)|^\lambda} \quad \text{on a}$$

$$|v_k(x,t) - \overline{v_k}(x,t)| \leq c 2^{k\lambda(1-\theta)} |u(x,t)^{\lambda+1} - \bar{u}(x,t)^{\lambda+1}| \frac{1}{2^{\lambda k}} \quad \text{si}$$

$$u(x,t) \text{ ou } \bar{u}(x,t) \in [2^k, 2^{k+3}]$$

d'où

$$(11) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\lambda\theta p_0} \|v_k(t) - \overline{v_k}(t)\|_{L^{p_0}}^{p_0} \leq c \left\| |u(t)|^\lambda u(t) - |\bar{u}(t)|^\lambda \bar{u}(t) \right\|_{L^{p_0}}^{p_0} \quad \forall t \geq 0$$

$$\bullet \quad \text{Si } \bar{u}(x,t) \in W^{1,p_0}(\Omega) \quad \text{on a}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} v_k(x,t) \right| &\leq c 2^{(k+2)\lambda(1-\theta)} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}(x,t) \right| \quad \text{si } \bar{u}(x,t) \in [2^k, 2^{k+3}] \\ &\leq c 2^{-k\lambda\theta} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{u}(x,t)^{\lambda+1} \right| \end{aligned}$$

et avec (10) on obtient

$$(12) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\lambda\theta p_0} \left\| \bar{v}_k(t) \right\|_{W^{1,p_0}(\Omega)}^{p_0} \leq c \left\| |\bar{u}(t)|^{\lambda} \bar{u}(t) \right\|_{W^{1,p_0}(\Omega)}^{p_0}$$

• Si $\varphi \in L^{p_0}(\Omega)$ on considère $\bar{u}$ défini par $|\bar{u}(x)|^{\lambda} \bar{u}(x) = \varphi_+(x)$

puis on pose $T_k \varphi = h_k^{\lambda(1-\theta)+1}(\bar{u}(x))$

Alors (10) (11) et (12) signifient que l'application $T\varphi$:

$\varphi \rightarrow (2^{k\lambda\theta} T_k \varphi, k \in \mathbb{Z})$ vérifie

$$(13) \quad \begin{cases} \left\| T\varphi - T\psi \right\|_{\ell^{p_0}(L^{p_0}(\Omega))} \leq c \left\| \varphi - \psi \right\|_{L^{p_0}(\Omega)} & \forall \varphi, \psi \in L^{p_0}(\Omega) \\ \left\| T\varphi \right\|_{\ell^{p_0}(W^{1,p_0}(\Omega))} \leq c \left\| \varphi \right\|_{W^{1,p_0}(\Omega)} & \forall \varphi \in W^{1,p_0}(\Omega) \end{cases}$$

On peut alors appliquer la proposition 2 du paragraphe 0. En utilisant le fait que

$$(\ell^{p_0}(W^{1,p_0}), \ell^{p_0}(L^{p_0}))_{1-s_0, p_0} = \ell^{p_0}(W_{p_0}^{s_0, p_0}) \quad \text{Lions-Peetre [1]}$$

on obtient

$$(14) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\lambda\theta p_0} \left\| v_k(t) \right\|_{W_{p_0}^{s_0, p_0}(\Omega)}^{p_0} \leq c \left\| |u(t)|^{\lambda} u(t) \right\|_{W_{p_0}^{s_0, p_0}}^{p_0} \quad \forall t \geq 0$$

On multiplie par t^{α_0} , on intègre et on obtient (9). ■

On a $\left| \frac{\partial}{\partial t} v_k(x, t) \right| \leq c 2^{k\lambda(1-\theta)} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|$ si $u(x, t) \in [2^k, 2^{k+3}]$ et donc

$$(15) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-k\lambda(1-\theta)p_1} \left\| \frac{\partial}{\partial t} v_k(t) \right\|_{L^{p_1}}^{p_1} \leq c \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^{p_1}}^{p_1} \quad \forall t \geq 0$$

On multiplie par t^{α_1} et on intègre pour obtenir

$$(16) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-k\lambda(1-\theta)p_1} \left\| t^{\alpha_1} \frac{\partial v_k}{\partial t} \right\|_{L^{p_1}(L^{p_1})}^{p_1} \leq c \left\| t^{\alpha_1} \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^{p_1}(L^{p_1})}^{p_1}$$

• Pour chaque k on a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} t^{\alpha_0} v_k \in L^{p_0}(0, \infty; W^{s_0, p_0}(\Omega)) \\ t^{\alpha_1} \frac{\partial v_k}{\partial t} \in L^{p_1}(0, \infty; L^{p_1}(\Omega)) \end{array} \right.$$

Par conséquent d'après la définition 3 et la proposition 1 du paragraphe 0 on a $v_k(0) \in X$

et $\|v_k(0)\|_X \leq c \left\| t^{\alpha_0} v_k \right\|_{L^{p_0}(Y)}^{1-\theta} \left\| t^{\alpha_1} \frac{\partial v_k}{\partial t} \right\|_{L^{p_1}(X_1)}^{\theta}$

On a donc en utilisant l'inégalité de Hölder

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|v_k(0)\|_X^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \leq c \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(2^{k\lambda\theta(1-\theta)} \left\| t^{\alpha_0} v_k \right\|_{L^{p_0}(Y)}^{1-\theta} \right)^{\frac{p_0}{1-\theta}} \right\}^{\frac{1-\theta}{p_0}} \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(2^{-k\lambda\theta(1-\theta)} \left\| t^{\alpha_1} \frac{\partial v_k}{\partial t} \right\|_{L^{p_1}(X_1)}^{\theta} \right)^{\frac{p_1}{\theta}} \right\}^{\frac{\theta}{p_1}}$$

ce qui d'après (9) et (16) est $\leq c \left\| t^{\alpha_0} |u(t)|^{\lambda} u(t) \right\|_{L^{p_0}(Y)}^{1-\theta} \left\| t^{\alpha_1} \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^{p_1}(X_1)}^{\theta}$

D'après (7) on a

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} |u(0)|^{\lambda(1-\theta)} u(0) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} v_k(0) \\ \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|v_k(0)\|_X^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \leq c \left\| t^{\alpha_0} |u(t)|^{\lambda} u(t) \right\|_{L^{p_0}(Y)}^{1-\theta} \left\| t^{\alpha_1} \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^{p_1}(X_1)}^{\theta} \end{array} \right.$$

Alors (5) est conséquence du lemme suivant

Lemme 2 : Si $\varphi_k \in X = (W_{p_0}^{s_0, p_0}(\Omega), L^{p_1}(\Omega))_{\theta, p_{\theta}}$ et si $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\varphi_k\|_X^{p_{\theta}} < +\infty$

Alors $\varphi = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_k$ (enveloppe supérieure) $\in X$ et on a

$$(18) \quad \|\varphi\|_X \leq c \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\varphi_k\|_X^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}}$$

Démonstration : Si $\psi_k \in L^p$ et $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\psi_k\|_{L^p}^p < +\infty$ alors $\psi = \sup \psi_k \in L^p$.

En effet pour toute famille finie $\|\sup(\psi_{k_1} \dots \psi_{k_n})\|_{L^p}^p \leq \sum_{i=1}^n \|\psi_{k_i}\|_{L^p}^p$

Alors ψ est limite croissante des $\sup(\psi_{k_1} \dots \psi_{k_n})$ on a donc

$$\|\sup(\psi_1 \dots \psi_n \dots)\|_{L^p}^p \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \|\psi_i\|_{L^p}^p$$

si $\psi_k - \chi_h \in L^p$ et $\sum \|\psi_k - \chi_h\|_{L^p}^p < +\infty$ alors $\sup(\psi_1 \dots \psi_n) - \sup(\chi_1 \dots \chi_n) \in L^p$

en effet on a $|\sup(\psi_{k_1}, \dots, \psi_{k_n}) - \sup(\chi_{h_1}, \dots, \chi_{h_n})| \leq \sup(|\psi_{k_1} - \chi_{h_1}|, \dots, |\psi_{k_n} - \chi_{h_n}|)$

On a donc

$$(19) \quad \text{si } (\psi_k - \chi_h, k \in \mathbb{Z}) \in \ell^p(L^p(\Omega)) \text{ on a } \|\sup \psi_k - \sup \chi_h\|_{L^p} \leq c \|\psi_k - \chi_h\|_{\ell^p(L^p)}$$

• Si $\psi_k \in W^{1,q}$ et $\sum \|\psi_k\|_{W^{1,q}} < +\infty$ alors $\sup \psi_k \in W^{1,q}$

en effet on a pour toute famille finie $\|\sup(\psi_{k_1}, \dots, \psi_{k_n})\|_{W^{1,q}}^q \leq \sum_{i=1}^n \|\psi_{k_i}\|_{W^{1,q}}^q$
et donc

$$(20) \quad \text{si } \psi_k \in \ell^q(W^{1,q}) \text{ on a } \|\sup \psi_k\|_{W^{1,q}} \leq c \|\psi_k\|_{\ell^q(W^{1,q})}$$

Alors on utilise la proposition 2 du paragraphe 0 avec les espaces suivants

$$A_0 = \ell^{p_0(W^{1,p_0})} \quad A_1 = \ell^{p_0(L^{p_0})} \quad B_0 = W^{1,p_0} \quad B_1 = L^{p_0} \quad \text{et } T = \sup_{\ell^{p_0(W^{1,p_0})}, \ell^{p_0(L^{p_0})}} \ell^{p_0(W^{s_0,p_0})}$$

$$\text{si } \psi_k \in \ell^{p_0(W^{s_0,p_0})}_{p_0} \text{ alors } \|\sup \psi_k\|_{W^{s_0,p_0}} \leq c \|\psi_k\|_{\ell^{p_0(W^{s_0,p_0})}_{p_0}}$$

On utilise alors la même proposition mais avec cette fois

$$A_0 = \ell^{p_0}_{(W^{s_0, p_0}_{p_0})} \quad A_1 = \ell^{p_1}_{(L^{p_1})} \quad B_0 = W^{s_0, p_0}_{p_0} \quad B_1 = L^{p_1} \quad \text{et} \quad T = \sup$$

on a alors $T : \ell^{p_\theta}_{(X)} = (\ell^{p_0}_{(W^{s_0, p_0}_{p_0})}, \ell^{p_1}_{(L^{p_1})})_{\theta, p_\theta} \rightarrow$

$$X = (W^{s_0, p_0}_{p_0}, L^{p_1})_{\theta, p_\theta} \quad \text{et on a bien (18)} \quad \blacksquare$$

2ème étape : On va montrer que si $|a|^{\lambda(1-\theta)} a \in X$ alors il existe u vérifiant (4) et $u(0) = a$ ainsi que

$$(21) \quad \|t^{\alpha_0} |u|^{\lambda} u\|_{L^{p_0}(Y)} + \|t^{\alpha_1} \frac{\partial u}{\partial t}\|_{L^{p_1}(X_1)} < c \| |a|^{\lambda(1-\theta)} a \|_X$$

Comme dans le théorème 2 (III) du paragraphe 1 on peut se ramener au cas $a \geq 0$.

Si $a_+ = v(0)$ avec v vérifiant (4) et $a_- = w(0)$ avec w vérifiant (4) on posera $u(t) = F(v_+(t), w_+(t))$ avec F définie par (18) paragraphe 1.

On suppose donc $a \geq 0$. On pose (22) $\mu = \lambda(1-\theta) + 1$

$$(23) \quad \begin{cases} a_k = h_k(a) = T_k(a^\mu) \\ T_k(\varphi) = h_k(\varphi^{\frac{1}{\mu}}) \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Lemme 3 : Si $\varphi \in X$ alors $T_k \varphi \in X$ pour tout k et

$$(24) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(\mu-1)p_\theta} \|T_k \varphi\|_X^{p_\theta} < c \|\varphi\|_X^{p_\theta}$$

Démonstration : Si $\varphi = \psi \in L^p(\Omega)$ on a

$$|T_k \varphi(x) - T_k \psi(x)| \leq c \left| \varphi(x)^{\frac{1}{\mu}} - \psi(x)^{\frac{1}{\mu}} \right| \quad \text{si } \varphi(x) \text{ ou } \psi(x) \in [2^{-k\mu}, 2^{(k+3)\mu}]$$

comme $\left| a^{\frac{1}{\mu}} - b^{\frac{1}{\mu}} \right| < c \frac{|a-b|}{(|a|+|b|)^{\frac{\mu-1}{\mu}}}$ on a

$$|T_k \varphi(x) - T_k \psi(x)| < c |\varphi(x) - \psi(x)| 2^{-k(\mu-1)} \text{ si } \varphi(x) \text{ ou } \psi(x) \in [2^{k\mu}, 2^{(k+3)\mu}]$$

et donc

$$(25) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(\mu-1)p} \|T_k \varphi - T_k \psi\|_{L^p}^p \leq c \|\varphi - \psi\|_{L^p}^p \text{ si } \varphi - \psi \in L^p.$$

$$\bullet \text{ Si } \varphi \in W^{1,p} \text{ on a } \left| \frac{\partial}{\partial x_i} T_k \varphi(x) \right| \leq c \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| |\varphi|^{\frac{1}{p}-1} \text{ si } \varphi(x) \in [2^{k\mu}, 2^{(k+3)\mu}]$$

$$\leq c 2^{-k(\mu-1)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|$$

donc

$$(26) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(\mu-1)p} \|T_k \varphi\|_{W^{1,p}}^p \leq c \|\varphi\|_{W^{1,p}}^p.$$

On utilise alors la proposition 2 du paragraphe 0 comme au lemme 1 pour

$$\text{obtenir } \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(\mu-1)p_0} \|T_k \varphi\|_{W_{p_0}^{s_0, p_0}}^{p_0} \leq c \|\varphi\|_{W_{p_0}^{s_0, p_0}}^{p_0}$$

puis (24).

$$\text{On a donc } a_k \in X \text{ et } \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(\lambda-1)p_\Theta} \|a_k\|_X^{p_\Theta} \leq c \|a\|^{\lambda(1-\Theta)} \|a\|_X^{p_\Theta}$$

$$\text{On peut trouver } u_k \text{ tel que } t^{\alpha_0} u_k \in L^{p_0}(0, \infty; W_{p_0}^{s_0, p_0}) \text{ et } u_k(0) = a_k$$

$$t^{\alpha_1} \frac{\partial u_k}{\partial t} \in L^{p_1}(0, \infty; L^{p_1})$$

En changeant t en t^ξ on peut pour tout $\xi > 0$ choisir u_k vérifiant

$$(27) \quad \left| \begin{array}{l} \|t^{\alpha_0} u_k\|_{L^{p_0}(W_{p_0}^{s_0, p_0})} \leq c \xi^\Theta \|a_k\|_X \\ \|t^{\alpha_1} \frac{\partial u_k}{\partial t}\|_{L^{p_1}(L^{p_1})} \leq c \xi^{\Theta-1} \|a_k\|_X \\ u_k(0) = a_k \end{array} \right|$$

Comme $0 \leq a_k \leq 2^{k+2}$ on peut en tronquant u_k supposer

$$(28) \quad 0 \leq u_k \leq 2^{k+2}$$

On choisit

$$(29) \quad \xi = 2^{-\frac{k \lambda p_0}{(1-\theta)p_1 + \theta p_1} \frac{p_1 - p_0}{(1-\theta)p_1 + \theta p_0}} \|a_k\|_X$$

$$\text{On a } \|t^{\alpha_0} |u_k|^\lambda u_k\|_{L^{p_0}(W_{p_0}^{s_0, p_0})} \leq c 2^{k\lambda} \|t^{\alpha_0} u_k\|_{L^{p_0}(W_{p_0}^{s_0, p_0})} \quad \text{d'après (28)}$$

$$\leq c 2^{k\lambda} \xi^\theta \|a_k\|_X \quad \text{d'après (27)}$$

$$\leq c 2^{\frac{k(\mu-1)p_\theta}{p_0}} \|a_k\|_X^{p_\theta/p_0} \quad \text{d'après (29)}$$

$$\text{et } t^{\alpha_1} \left\| \frac{\partial u_k}{\partial t} \right\|_{L^{p_1}(L^{p_1})} \leq c 2^{\frac{k(\mu-1)p_\theta}{p_1}} \|a_k\|_X^{p_\theta/p_1}$$

On a donc

$$(30) \quad \begin{cases} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|t^{\alpha_0} |u_k|^\lambda u_k\|_{L^{p_0}(W_{p_0}^{s_0, p_0})}^{p_0} \leq c \| |a|^{\lambda(1-\theta)} a \|_X^{p_\theta} \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|t^{\alpha_1} \frac{\partial u_k}{\partial t}\|_{L^{p_1}(L^{p_1})}^{p_1} \leq c \| |a|^{\lambda(1-\theta)} a \|_X^{p_\theta} \end{cases}$$

On pose alors

$$(31) \quad u = \sup_{k \in \mathbb{Z}} u_k \quad \text{et donc} \quad |u|^\lambda u = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |u_k|^\lambda u_k.$$

• D'après (23) on a

$$(32) \quad u(0) = a$$

Comme dans la démonstration du lemme 2 on obtient :

$$(33) \quad \left| \begin{array}{l} \| t^{\alpha_0} |u|^{\lambda_u} \|_{L^{p_0}(W_{p_0}^{s_0, p_0})}^{p_0} \leq c \| |a|^{\lambda(1-\theta)} a \|_X^{p_\theta} \\ \| t^{\alpha_1} \frac{\partial u}{\partial t} \|_{L^{p_1}(L^{p_1})}^{p_1} \leq c \| |a|^{\lambda(1-\theta)} a \|_X^{p_\theta} \end{array} \right.$$

Alors en changeant t en t^v , v convenable on a

$$(34) \quad \| t^{\alpha_0} |u|^{\lambda_u} \|_{L^{p_0}(W_{p_0}^{s_0, p_0})}^{p_0} + \| t^{\alpha_1} \frac{\partial u}{\partial t} \|_{L^{p_1}(L^{p_1})}^{p_1} < c \| |a|^{\lambda(1-\theta)} a \|_X^{p_\theta}$$

Alors (32) et (33) achèvent la 2ème étape. ■

IV - EXEMPLE

Soit $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ $1 < p < +\infty$ et A l'opérateur défini par

$$(1) \quad A u = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + |u|^{p-2} u$$

On sait (Lions [1]) que si $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ unique : $A u = f$.

On rappelle que $W_0^{1,p}(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$: $W^{-1,p'}(\Omega)$, $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$ est son dual.

$$f \in W^{-1,p'}(\Omega) \Leftrightarrow \exists f_0, f_1 \dots f_n \in L^{p'}(\Omega) : f = f_0 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

Lemme 1 : Si $p \geq 2$ alors

$$(2) \quad \|u-v\|_{W_0^{1,p}} \leq c \|Au - Av\|_{W^{-1,p'}}^{\frac{1}{p-1}}$$

Si $1 < p \leq 2$

$$(3) \quad \|u-v\|_{W_0^{1,p}} \leq c \frac{\|Au-Av\|_{W^{-1,p'}}}{(\|u\| + \|v\|)^{p-2}}$$

Démonstration

a) $p \geq 2$ on utilise le fait que $(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b, a-b) \geq c|a-b|^p \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

On prend successivement $a = u$, $b = v$ puis $a = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $b = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ et on intègre

b) $1 < p \leq 2$ on utilise le fait que

$$(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b, a-b) \geq \frac{c|a-b|^2}{(|a| + |b|)^{2-p}} \quad \text{pour } a, b \in \mathbb{R} \text{ non tous deux nuls}$$

Prenant $a=u$, $b=v$ on a $|u-v|^2 \leq c(|u|+|v|)^{2-p}(|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v, u-v)$

Posant $X = (|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v, u-v)$ pour simplifier, on élève à la puissance $\frac{p}{2}$ et on intègre

$$\begin{aligned} \int |u-v|^p dx &\leq c \int (|u|+|v|)^{\frac{p(2-p)}{2}} X^{p/2} dx \\ &\leq c \left(\int (|u|+|v|)^p dx \right)^{\frac{2-p}{2}} \left(\int X dx \right)^{p/2} \text{ d'après Hölder} \\ &\leq c \frac{\|u-v\|_{L^p}^2}{(\|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p})^{2-p}} \end{aligned}$$

et donc $\int X dx \geq \frac{\|u-v\|_{L^p}^2}{(\|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p})^{2-p}}$

De même pour $a = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ et $b = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ ■

Si $f \in W^{-1,p'}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ alors on a (cf. Appendice)

$$(4) \quad \left\| |u|^{p-2}u \right\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

THEOREME 1 : Si $p \geq 2$ et $f \in (L^2(\Omega) \cap W^{-1,p'}(\Omega), W^{-1,p'}(\Omega))_{\theta,q}$ alors la solution u de $Au = f$ vérifie $u \in (L^{2(p-1)}(\Omega), L^p(\Omega))_{\theta,q}$ et

$$(5) \quad \|u\|_{(\dots)} \leq c \|f\|_{(\dots)}^{\frac{1}{p-1}}$$

Démonstration : L'application A^{-1} est höldérienne d'ordre $\frac{1}{p-1}$ de $W^{-1,p'}$ dans L^p d'après (2). Elle envoie $L^2(\Omega) \cap W^{-1,p'}(\Omega)$ dans $L^{2(p-1)}(\Omega)$ d'après (4) et on a

$$\|u\|_{L^{2(p-1)}(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}$$

Alors on utilise un théorème d'interpolation non linéaire Peetre [3] Tartar [1] (ou bien le théorème 1 du paragraphe II avec $\lambda = \tilde{\lambda} = 0$ $\alpha = \beta = \frac{1}{p-1}$) et on a le théorème. ■

THEOREME 2 : Si $1 < p \leq 2$ et $f \in (L^2(\Omega) \cap W^{-1,p'}(\Omega), W^{-1,p'}(\Omega))_{\theta,q}$ alors $u \in (L^{2(p-1)}(\Omega), L^p(\Omega))_{\eta,r}$ où $\frac{1-\eta}{\eta} = (p-1) \frac{1-\theta}{\theta}$ et $\frac{1}{r} = \frac{1-\eta(2-p)}{q(p-1)}$

Démonstration : D'après (3) l'application A^{-1} est localement lipschitzienne sur $W^{-1,p'}(\Omega)$. Alors on utilise une variante du théorème utilisé précédemment Tartar [1] (ou bien le théorème 2 du paragraphe II avec $\lambda = \tilde{\lambda} = 0$ $\alpha = 1$ $\beta = \frac{1}{p-1}$) ■

Lemme 2 : Si $p \geq 2$. $Au = f$, $Av = g$ on a

$$(6) \quad \left\| |u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v \right\|_{L^{p'}} + \sum_i \left\| \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^{p'}} \\ \leq c \|f-g\|_{W^{-1,p'}}^{p'/2} (\|f\| + \|g\|)^{1-p'/2}$$

Si $1 < p \leq 2$ on a

$$(7) \quad \text{même quantité} \leq c \|f-g\|^{2/p'} (\|f\| + \|g\|)^{\frac{2}{p'}-1}$$

Démonstration :

a) $p \geq 2$ on pose $\varphi = |u|^{p-2}u$ et $\psi = |v|^{p-2}v$ alors d'après le lemme 1 on a

$$\int (|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v, u-v) dx = \int (|\varphi|^{p'-2}\varphi - |\psi|^{p'-2}\psi, \varphi - \psi) dx \geq c \frac{\|\varphi - \psi\|_{L^{p'}}^2}{(\|\varphi\| + \|\psi\|)^{2-p}}$$

Même résultat pour $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, on en déduit que

$$(Au - Av, u-v) \geq \frac{c [\text{1er membre de l'inégalité (6)}]^2}{(\|f\| + \|g\|)^{2-p'}}$$

D'autre part $(f-g, u-v) \leq \|f-g\| \|u-v\| \leq c \|f-g\|^{1+\frac{1}{p-1}}$ d'après le lemme 1. D'où l'inégalité (6).

b) $1 < p \leq 2$. On a alors $\int (|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v, u-v) dx \geq c \|u-v\|_{L^{\frac{p}{p-1}}}^{p'}$,
 donc $(Au - Av, u-v) \geq c [1^{\frac{p}{p-1}} \text{ membre de (6)}]^{p'}$
 et $(f-g, u-v) \leq \|f-g\| \|u-v\| \leq c \|f-g\|^2 (\|f\| + \|g\|)^{\frac{2-p}{p-1}}$ ■

THEOREME 2 bis : Si $1 < p \leq 2$ et $f \in (L^2(\Omega) \cap W^{-1,p'}(\Omega), W^{-1,p'}(\Omega))_{\theta,q}$
 alors $u \in (L^{2(p-1)}(\Omega), L^p(\Omega))_{\xi,s}$ où $\frac{1-\xi}{\xi} = \frac{1-\theta}{\theta} \frac{2}{p}$, et $\frac{1}{s} = \frac{p+\xi(p-2)}{qp(p-1)}$

Démonstration : Il est équivalent de démontrer que $|u|^{p-2}u \in (L^2(\Omega), L^{p'}(\Omega))_{\xi}$,
 avec $t(p-1) = s$. Or ceci résulte, en utilisant toujours le même théorème
 d'interpolation, du fait que l'application $f \rightarrow |u|^{p-2}u$ est localement
 höldérienne sur $W^{-1,p'}$ d'après (7) et bornée avec l'exposant 1 sur $L^2(\Omega)$. ■

Remarque 1 : Comme $(p-1) \leq \frac{2}{p}$, l'exposant ξ du théorème 2bis est
 inférieur à l'exposant η du théorème 2. Le théorème 2 bis apporte donc
 un renseignement supplémentaire qui correspond à une propriété à l'infini
 puisque $2(p-1) \leq p$. ■

Notons $W_1(\Omega)$ l'espace des fonctions $v \in L^{p'}(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$.

THEOREME 3 : Si $p \geq 2$ et $f \in (L^2(\Omega) \cap W^{-1,p'}(\Omega), W^{-1,p'}(\Omega))_{\theta,q}$ alors

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \in (W_1(\Omega), L^{p'}(\Omega))_{\eta,r} \text{ où } \frac{1-\eta}{\eta} = \frac{1-\theta}{\theta} \frac{2}{p}, \text{ et } \frac{1}{r} = \frac{p+\eta(p-2)}{qp}$$

Démonstration : D'après (6) l'application $f \rightarrow \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}$ est localement
 höldérienne d'ordre $\frac{p'}{2}$ sur $W^{-1,p'}(\Omega)$. Elle est bornée sur $L^2(\Omega)$ d'exposant
 1 d'après (4).

Si $f \in L^2(\Omega) \cap W^{-1,p'}(\Omega)$ on a bien $\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W_1$.

En effet

$$\left\| \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p} \leq c \|f\|_{W^{-1,p}}$$

et

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right\|_{L^2} \leq c \|f\|_{L^2} \quad \text{d'après (4)} \quad \blacksquare$$

THEOREME 4 : Si $1 < p \leq 2$ et $f \in (L^2(\Omega) \cap W^{-1,p'}(\Omega), W^{-1,p'}(\Omega))_{\Theta,q}$ alors

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \in (W_i(\Omega), L^{p'}(\Omega))_{n,r} \quad \text{où}$$

$$\frac{1-n}{n} = \frac{1-\Theta}{\Theta} \frac{p'}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} = \frac{2(p-1) - n(p-2)}{2q(p-1)}$$

Démonstration : Identique aux précédentes. ■

On ne peut pas appliquer les résultats du paragraphe III en utilisant l'espace W_i . On saurait conclure si on remplaçait W_i par

$$H_i^1 = \{v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}.$$

Si K est un compact de $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ on considère l'application $f \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}|_K$.

Si $1 < p \leq 2$. Cette application est localement lipchitzienne de $W^{-1,p'}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(K)$. De plus comme $W_i(K) \subset H_i^1(K)$ on a :

$$\left\| \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{H_i^1(K)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

THEOREME 5: Si $1 < p \leq 2$. $0 < \Theta < 1$ et $\frac{1-\Theta}{2} + \frac{\Theta}{p} \neq \frac{1}{q}$.

Si $f \in (L^2 \cap W^{-1,p'}(\Omega), W^{-1,p'}(\Omega))_{\Theta,q}$ alors pour tout compact K de $\overline{\mathbb{R}_+^n}$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{(p-2)\Theta} \frac{\partial u}{\partial x_i} \in (H_i^1(K), L^p(K))_{\Theta,q}.$$

Démonstration : On utilise le théorème 2 du paragraphe II . D'après ce qui précède on peut prendre $\alpha = \beta = 1$ $\lambda = 0$ $\tilde{\lambda} = p-2$.

Le théorème 1 du paragraphe III permet de caractériser l'espace obtenu ■

Remarque 2 : Le théorème 5 permet de montrer que $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ a une dérivée en x_1 d'ordre 0 . Le théorème 4 ne permet d'aller que jusqu'à $n \leq 0$. ■

APPENDICE

$$(1) \quad Au = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + |u|^{p-2} u = f \in L^2(\Omega) \cap W^{-1,p'}(\Omega).$$

$$\Omega = \mathbb{R}_+^n$$

1ère étape : $\| |u|^{p-2} u \|_{L^2(\Omega)} \leq \| f \|_{L^2(\Omega)}.$

Pour $\varepsilon > 0$ on définit u_ε par

$$(2) \quad u_\varepsilon + \varepsilon |u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon = u$$

on a donc

$$(3) \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \left[1 + (p-1)\varepsilon |u_\varepsilon|^{p-2} \right] = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Par conséquent $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et donc aussi : $|u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon$.

On multiplie alors (1) par $|u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon$.

On remarque que $\int_\Omega - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \cdot |u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon \, dx$

$$= (p-1) \int \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} |u_\varepsilon|^{p-2} \, dx \geq 0 \quad \text{car} \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \geq 0 \text{ d'après (3)}$$

On remarque que $\int |u|^{p-2} u \cdot |u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon \, dx \geq \int |u_\varepsilon|^{2(p-1)} \, dx$

On a donc

$$\| |u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon \|_{L^2}^2 \leq \int_\Omega f |u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon \, dx \leq \| f \|_{L^2} \| |u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon \|_{L^2}$$

on a donc $|u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon \in$ borné de L^2 et comme $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$ fort

on a bien $|u|^{p-2} u \in L^2(\Omega).$

2ème étape : $i \neq n \quad \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c \| f \|_{L^2(\Omega)}$

L'estimation s'obtient formellement ⁽¹⁾ en multipliant l'équation

$$\text{par } - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

On considère $W = \{u \in L^p(\Omega) ; \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^p(\Omega) \text{ pour } j \neq i; u|_{\mathbb{R}^{n-1}} = 0\}$

$$\text{on pose } \hat{V}_i \varphi(x) = \frac{\varphi(x + h\lambda_i) - \varphi(x - h\lambda_i)}{2h} \quad \text{où } h > 0 \text{ est destiné à}$$

tendre vers 0 et où λ_i désigne le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)$ (on utilisera ensuite le fait que $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)$ est dense dans $L^2 \cap W^{-1,p}(\mathbb{R}_+^n)$) on résout l'équation

$$(4) \quad A_h u = - \sum_{j \neq i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + |u|^{p-2} u - \hat{V}_i (|\hat{V}_i u|^{p-2} \hat{V}_i u) = f.$$

Cette équation a une solution unique $u_h \in W$ car A est un opérateur de dualité sur W (Lions [1]). Comme $\frac{\partial u_h}{\partial x_j} \in$ borné de $L_p(\Omega)$ $u_h \in$ borné de $L^p(\Omega)$ et $\hat{V}_i u \in$ borné de $L^p(\Omega)$ on déduit que $u_h \rightarrow u_0$ dans W faible où u_0 est la solution de $Au = f$.

Il suffit donc de montrer les estimations cherchées sur u_h .

Pour $\varepsilon > 0$ on résoud (5) $v_\varepsilon + \varepsilon |v_\varepsilon|^{p-2} v_\varepsilon = \hat{V}_i u$.

$$\text{pour } j \neq i \text{ on a } (6) \quad \frac{\partial v}{\partial x_j} \varepsilon [1 + (p-1) |v_\varepsilon|^{p-2}] = \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{V}_i u = \hat{V}_i \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Par conséquent on a $v_\varepsilon \in W$ et donc $|v_\varepsilon|^{p-2} v_\varepsilon \in W$.

On multiplie alors l'équation (4) par $-\hat{V}_i (|v_\varepsilon|^{p-2} v_\varepsilon)$.

(1) cette méthode m'a été signalée par H. Brézis.

On remarque que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) (-) \hat{v}_i (|v_\epsilon|^{p-2} v_\epsilon) dx = \\ & = \int_{\Omega} \hat{v}_i \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (|v_\epsilon|^{p-2} v_\epsilon) dx \\ & = (p-1) \int_{\Omega} |v_\epsilon|^{p-2} (1 + (p-1) |v_\epsilon|^{p-2})^{-1} \hat{v}_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \hat{v}_i \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) dx \geq 0 \\ & \text{en effet} \\ & \hat{v}_i \varphi \hat{v}_i (|\varphi|^{p-2} \varphi) = \frac{1}{4h^2} (\varphi(x+h\ell_i) - \varphi(x-h\ell_i)) (|\varphi(x+h\ell_i)|^{p-2} \varphi(x+h\ell_i) \\ & \quad - |\varphi(x-h\ell_i)|^{p-2} \varphi(x-h\ell_i)) \end{aligned}$$

qui est ≥ 0 grâce à la monotonie de l'application $\varphi \rightarrow |\varphi|^{p-2} \varphi$

De même $\int |u|^{p-2} u (-) \hat{v}_i (|v_\epsilon|^{p-2} v_\epsilon) dx = \int \hat{v}_i (|u|^{p-2} u) |v_\epsilon|^{p-2} v_\epsilon dx$
 mais comme $\hat{v}_i (|u|^{p-2} u)$ et v_ϵ sont du même signe que $\hat{v}_i u$ cette
 intégrale est ≥ 0 .

Il reste à considérer le terme $\int_{\Omega} \hat{v}_i (|\hat{v}_i u|^{p-2} \hat{v}_i u) \hat{v}_i (|v_\epsilon|^{p-2} v_\epsilon) dx$

On veut montrer que ce terme est supérieur à $c \int |\hat{v}_i (|v_\epsilon|^{p-2} v_\epsilon)|^2 dx$

Si on pose $w = |v_\epsilon|^{p-2} v_\epsilon$ on veut donc montrer que

$$\int \hat{v}_i (w(1 + \epsilon |w|^{\frac{p-2}{p-1}})^{p-1}) \hat{v}_i w dx \geq c \int |\hat{v}_i w|^2 dx$$

Il s'agit donc de montrer que la dérivée de la fonction

$$w(1 + \epsilon |w|^{\frac{p-2}{p-1}})^{p-1}$$

est toujours supérieure à c .

Le calcul explicite montre que

$$c = \inf_{x \geq 0} (1 + \epsilon x)^{p-2} (1 + \epsilon(p-1)x) = \inf_{x \geq 0} (1+x)^{p-2} (1 + (p-1)x) \quad (c = 1 \text{ si } p \geq \frac{3}{2})$$

On a donc $c \int_{\Omega} |\hat{v}_i (|v_\varepsilon|^{p-2} v_\varepsilon)|^2 dx \leq - \int f \hat{v}_i (|v_\varepsilon|^{p-2} v_\varepsilon) dx$

Par conséquent on a $\hat{v}_i (|v_\varepsilon|^{p-2} v_\varepsilon) \in \text{borné de } L^2$.

Comme $v_\varepsilon \rightarrow \hat{v}_i u_h$ dans L^p fort on a

$$\hat{v}_i (|\hat{v}_i u_h|^{p-2} \hat{v}_i u_h) \in \text{borné de } L^2(\Omega)$$

Comme on sait que $\hat{v}_i u_h \rightarrow \frac{\partial u_0}{\partial x_i}$ dans L^p faible

et aussi que $|\hat{v}_i u_h|^{p-2} \hat{v}_i u_h \rightarrow |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}$ (utiliser la méthode de

monotonie Lions [1])

on en déduit que $\frac{\partial}{\partial x_i} (|\frac{\partial u}{\partial x_i}|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}) \in L^2(\Omega)$.

3ème étape: $\| \frac{\partial}{\partial x_n} (|\frac{\partial u}{\partial x_n}|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_n}) \|_{L^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}$

d'après l'équation. ■

BIBLIOGRAPHIE

- GRISVARD P. [1] - Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications.
Journal de Mathématiques 45 (1966) 143-290.
- LIONS J.L. [1] - Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.
DUNOD - GAUTHIER-VILLARS , Paris 1969.
- LIONS J.L. - PEETRE J. [1] - Sur une classe d'espaces d'interpolation.
Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publ. Math
19 (1964) 5-68.
- PEETRE J. [1] - A theory of interpolation of normed spaces.
Notas de matematica 39 (1968), Brésil.
- [2] - Sur le nombre de paramètres dans la définition de certains espaces d'interpolation.
Ricerche Mat. 12 (1963) 248-261.
- [3] - Interpolation of Lipschitz operators and metric spaces.
Matematica, Cluj.
- [4] - A new approach in interpolation spaces.
Studia Mathematica 34 (1970) 23-42.
- TARTAR L. [1] - Théorème d'interpolation non linéaire et applications.
C.R. Acad. Sciences, Paris 270 (1970) 1729-1731.

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT : D . ! E . T A . T

THESE DE : ES . - SCIENCES . MATHEMATIQUES

NOM : T A R T A R

Prénoms : L U C

né le 21 Décembre 1946 . a PARIS XIIème Dép^t : SEINE

1ère THESE : " INTERPOLATION NON LINEAIRE ET APPLICATIONS . "

2e THESE (Propositions faites par l'Université) :



Vu et Approuvé

PARIS, le 17 MAI 1971.

Le Président

de l'Université de PARIS VI

A handwritten signature in dark ink, consisting of several loops and strokes.

